Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke.

Theorie und Anwendungen.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Kaiser Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doktorwürde

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Hans Maurer

aus Darmstadt.

ALTONA.

Buchdruckerei von Hammerich & Lesser.

1894.

Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke.

Theorie und Anwendungen.

Von **Hans Maurer** aus Darmstadt.

Einleitung.

In vielen Gebieten der messenden Wissenschaften und der Technik stellt sich die Nothwendigkeit heraus, zahlreiche Rechnungen nach derselben Formel durchzuführen. Unter den verschiedenen Hülfsmitteln, die uns zur Verminderung dieser Unbequemlichkeit zur Verfügung stehen, werden die graphischen Tafeln anscheinend viel weniger benutzt, als es ihrer Brauchbarkeit entspricht. Wohl in den meisten Fällen kommen Zahlentabellen zur Verwendung; in der That verdienen diese auch, wenn es sich um Funktionen einer einzigen Variabelen handelt, in der Regel den Vorzug. Hier wird man eine graphische Darstellung der Funktion durch eine Kurve hauptsächlich dann wählen, wenn man die Art der Abhängigkeit erst kennen lernen will, da deren Verlauf für das ganze Gebiet der Variabelen in dem Kurvenzug mit einem Blick überschaut werden kann. Auch dann empfiehlt sich eine graphische Abbildung, wenn die Schwankungen der Funktion nicht gross aber sehr unregelmässig sind (Kurven von Registrirapparaten z. B. für Lufttemperatur als Funktion der Zeit), weil die Zeichnung eine viel grössere Anzahl von Funktionswerthen ablesen lässt, als es eine Zahlentabelle auf gleichem Raum gestattet. Um aus einer Zahlentabelle zu jedem Werth der unabhängigen Variabelen den Funktionswerth zu entnehmen, muss man interpoliren, und da jede andere als die lineare Interpolation wegen der Unbequemlichkeit der Rechnung ausgeschlossen ist, so muss man von einer guten Tabelle verlangen, dass die angegebenen Variabelen-Intervalle klein genug sind, um eine fehlerfreie Interpolation zu ermöglichen. Bei graphischen Tafeln muss aus demselben Grunde der Maassstab hinreichend gross sein.

Für Tabellen, welche Funktionen zweier Variabelen darstellen, muss ebenfalls die Zulässigkeit linearer Interpolation verlangt werden. Damit eine solche Tabelle praktischen Werth erlangt, muss sie aber ausserdem noch einer anderen Bedingung Genüge leisten, die sich aus der folgenden Betrachtung ergiebt. Um den Funktionswerth $f(x/y)$ für ein Werthepaar der unabhängigen Veränderlichen x, y aus der Tabelle zu entnehmen, sind eigentlich drei Interpolationen nöthig; man interpolirt nämlich nach x bei zwei benachbarten in der Tabelle angegebenen Werthen von y und dann zwischen den Interpolations-Resultaten nach y, wie jedes Exempel direkt erkennen lässt. Man bestimme z. B. aus der folgenden kleinen Tabelle den Werth der Funktion

$$f(x/y) = 19xy + 10x - 18y \qquad \text{für } x = 3.7,\ y = 1.4.$$

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$y = 0$	10	20	30	40
$y = 1$	11	40	69	98
$y = 2$	12	60	108	156
$y = 3$	13	80	147	214

In dieser Tabelle sind bei jedem einzelnen angegebenen Werthe von y die Intervalle der Funktionswerthe für die auf einander folgenden aequidistanten Werthe von x konstant, ebenso bei jedem angegebenen Werthe von x diejenigen für die auf einander folgenden aequidistanten Werthe von y. Die lineare Interpolation führt also genau zum richtigen Resultat; aber die Rechnung wird sehr komplizirt. Man muss hier die oben erwähnten drei Interpolationen wirklich ausführen, weil bei zwei auf einander folgenden konstanten

Werthen von y die Funktionsdifferenzen für benachbarte Werthe von x beträchtliche Unterschiede zeigen. Diese Unterschiede müssen, falls die Tabelle praktisch verwendbar sein soll, eine zu vernachlässigende Grösse besitzen; denn nur dann reduzirt sich die Anzahl der nothwendigen Interpolationen auf zwei. Man muss also bei einer solchen Tabelle ausser der Zulässigkeit linearer Interpolation noch verlangen, dass für die in der Tabelle angegebenen benachbarten Variabelen-Werthe x, $(x + \Delta x)$, y, $(y + \Delta y)$ entweder die Funktionsänderungen:

$$\left[f(x/y + \Delta y) - f(x/y)\right] \text{ und } \left[f(x + \Delta x/y + \Delta y) - f(x + \Delta x/y)\right]$$

oder die folgenden: $\left[f(x + \Delta x/y) - f(x/y)\right]$ und $\left[f(x + \Delta x/y + \Delta y) - f(x/y + \Delta y)\right]$

sich um eine zu vernachlässigende Grösse unterscheiden. Aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, bleibt die rechnerische Interpolation eine Unbequemlichkeit, die für den Ungeübten entweder Zeitverlust oder Ungenauigkeit zur Folge hat.

Handelt es sich um Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen, so werden Zahlentabellen sehr voluminös, da man auf einem Blatt in Spalten und Zeilen die Werthfolgen nur zweier Variabelen anordnen kann; man muss also i. A. (wenn nicht einzelne Variabele nur in Korrektionsgliedern im Resultat auftreten), um eine weitere Mannigfaltigkeit darzustellen, eben eine ganze Serie von Tabellen zweier Variabelen anlegen. Dagegen giebt es gewisse Funktionen von acht unabhängigen Variabelen, die derar durch graphische Tafeln wiedergegeben werden können, dass eine solche Funktion durch einmalige Ablesung auf einem Blatt, welches die ganze darzustellende Mannigfaltigkeit enthält, bestimmt werden kann. (S. 11.) Aber auch bei Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen sind graphische Tafeln häufig praktischer als Zahlentabellen, weil sie eine grössere Anzahl von Werthen als diese direkt angeben können, und weil die noch erforderlichen Interpolationen in Schätzungen mit dem Auge bestehen, die unmittelbarer ausgeführt werden können als Rechnungen, und in denen man rascher durch Uebung die nöthige Fertigkeit erlangt.

Die vorliegende Arbeit enthält im ersten Theile in grossen Zügen eine allgemeine Theorie, im zweiten Beispiele solcher Tafeln, wie sie in der meteorologischen und physikalischen Praxis von Nutzen sein können. Angeregt wurde ich zu dieser Arbeit durch meine Beschäftigung im meteorologischen Landesdienst für Elsass-Lothringen während des Wintersemesters 1892—1893. Die Tafeln für meteorologische Zwecke sind schon damals, grösstentheils in der hier vorliegenden Form, entstanden und werden bei der Zentralstelle in Strassburg fortwährend gebraucht. Ich möchte an dieser Stelle dem Leiter des meteorologischen Landesdienstes, Herrn Dr. H. Hergesell, für das wohlwollende und fördernde Interesse, das er diesen Arbeiten entgegengebracht hat, meinen besten Dank aussprechen.

Von der einschlägigen Litteratur kannte ich damals nur eine graphische Tafel für die Korrektion des Barometerstandes wegen der Wärmeausdehnung des Quecksilbers und des Maassstabes.[1]) Durch gütige Mittheilung des Verfassers derselben wurde ich später auf das Buch von M. d'Ocagne[2]), welches ebenfalls die Theorie und Anwendung graphischer Tafeln behandelt, aufmerksam gemacht. Von diesem unterscheidet sich meine Arbeit in der Theorie durch die allgemeinere Grundlage: Der Begriff „Abacus" wird weiter gefasst; es werden allgemeinere Methoden der Verwendung von Transparenten angegeben, und auch solche Winkel und Bogenstücke resp. Abstände, die erst durch das Anlegen des Transparentes auf diesem bestimmt werden, als Bilder von Variabelen eingeführt. Dadurch wird es möglich, gewisse Funktionen von sieben und acht unabhängigen Veränderlichen (d'Ocagne gelangt bis zu Funktionen von fünf unabhängigen Variabelen) mit einer Ablesung zu bestimmen. Ferner wird an Beispielen gezeigt, wie man gegebenen Falles Gleichförmigkeit der Maassstäbe erreicht, resp. ihr möglichst nahe kommt. Die praktischen Anwendungen beziehen sich durchweg auf andere Gegenstände als bei d'Ocagne. Zu der kleinen Uebersicht der französischen Litteratur über den Stoff, die man bei d'Ocagne findet, dürfte von deutscher Seite jedenfalls das Werk von Vogler[3]) hinzuzufügen sein.

---

[1]) R. Mehmke, Wied. Ann. 41, p. 892, 1890.

[2]) M. d'Ocagne, Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Paris 1891.

[3]) Ch. A. Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellberechnen und Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde. Berlin 1877.

I. Theorie der graphischen Tafeln.

A. Allgemeines.

Eine graphische Tafel oder ein „Abacus“ soll dazu dienen, in der Ebene eine geometrische Darstellung irgend einer Abhängigkeit mehrerer Variabelen zu geben, so dass für eine Werthegruppe der unabhängigen Veränderlichen der zugehörige Funktionswerth entweder direkt oder mit einfachen geometrischen Hülfsmitteln aus der Figur abgelesen werden kann. Die unabhängigen Variabelen sind auf einem Abacus in der Regel durch Punktfolgen oder Kurvenscharen wiedergegeben, wobei die einzelnen Punkte resp. Kurven, welche auf der Tafel gezeichnet vorliegen, jedes Mal mit dem Werth der Variabele, den sie vorstellen, bezeichnet sind. Der Ausdruck „geometrische Hülfsmittel“ ist nicht so zu verstehen, dass auf dem Blatte Konstruktionen, etwa mit Zirkel und Lineal, auszuführen seien, vielmehr dienen diese Hülfsmittel nur dazu, den Funktionswerth, der schon irgendwo auf der Tafel selbst oder dem benutzten Hülfsapparat (z. B. einem transparenten Blatt) angeschrieben steht, aufzufinden. Wir brauchen ebensoviele Mannigfaltigkeiten von geometrischen Elementen, als Variabele in der Funktionsgleichung vorkommen.

Als solche verwendbare Elemente bieten sich zunächst Punkte und Linien (speziell Gerade). Messbare, durch diese bestimmte Grössen sind ferner Winkel, Abstände (auch Bogenstücke) und Flächenräume. Wegen der Umständlichkeit ihrer Messung sind Flächenräume als Bilder von Veränderlichen von vornherein auszuschliessen. Es bleiben uns also Punkte, Linien, Abstände oder Bogenstücke und Winkel. Diese Unterscheidung von vier Fällen bedarf noch einer Erläuterung.

Wenn nämlich eine Serie von Werthen einer Veränderlichen durch eine Punktfolge oder eine Kurvenschar abgebildet ist, so sind die messbaren Grössen, welche die Werthe der Variabelen angeben, nicht die Punkte oder Kurven, sondern Bogenstücke oder Abstände und Winkel. Man kann aber, wenn die Punktfolgen oder Kurvenscharen gezeichnet vorliegen, an jeden Punkt resp. jede Kurve den zugehörigen Variabelen-Werth anschreiben und dann als Bild des letzteren den Punkt oder die Kurve selbst betrachten. In diesem Falle wollen wir von einer Darstellung durch Punkte oder Kurven reden. Anders ist es, wenn die den Variabelen-Werthen entsprechenden Abstände oder Winkel nicht in der Tafel selbst gemessen und bezeichnet vorliegen, sondern erst durch anderweitige Hülfsmittel (Anlegen eines Transporteurs, eines geraden oder gekrümmten Maassstabes) bestimmt werden. Dann giebt es keine einzelnen Punkte oder Kurven auf dem Abacus, die als Bilder bestimmter Werthe der Veränderlichen angesehen werden könnten, die Variabele ist vielmehr durch Winkel oder Abstände dargestellt. So erhält man vier Arten der Variabelen-Darstellung, durch deren Kombinationen die verschiedenen Gruppen von graphischen Tafeln sich ergeben. Kurven oder Punkte, die Bilder bestimmter Werthe einer Veränderlichen sind, heissen nach einer von Vogler angegebenen, von d'Ocagne acceptirten Bezeichnung „isoplethe“ Kurven resp. isoplethe Punkte der Variabelen (von ἰσοπληθής, gleich viel).

Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt, dass alle Darstellungen, die sich durch Punktfolgen geben lassen, auch mit Geradenscharen möglich sind. Die Verschiedenheit dieser Elemente wird aber für ihre praktische Verwendbarkeit von grosser Bedeutung. Die Lage eines einzelnen Punktes in einer stetigen Punktfolge kann zwar nur ebenso durch Interpolation zwischen zwei bezeichneten Punkten bestimmt werden, wie die Lage einer nicht gezeichneten Geraden mit Hülfe zweier gezeichneten zu schätzen ist; aber der geometrische Ort, der für den Punkt in der Kurve vorliegt, erleichtert seine Interpolation sehr, während das Stück einer Enveloppe zwischen zweien ihrer Tangenten die Interpolation einer dritten nur wenig erleichtert, weil das Tangentenziehen nach dem Augenmaass überhaupt sehr unsicher ist; und ausserdem liegt dieses Stück in der Regel nicht im gebrauchten Theile der Tafel, lässt sich sehr häufig gar nicht auf derselben zeichnen, weil es zu weit wegfällt. Ersetzt man gar die Geraden durch Kurven, so kommt noch die Unsicherheit hinzu, welche die Variabilität der Kurvenform mit sich bringt. Aus diesen Gründen sind graphische Tafeln, auf denen die Veränderlichen durch Punkte auf Kurven dargestellt sind, i. A. den Kurventafeln vorzuziehen. Dagegen lassen sich eben wegen der Variabilität der Kurvenformen durch Kurvenscharen grössere Mannigfaltigkeiten von Funktionen darstellen als durch Punktfolgen.

Abgesehen von der Wahl der Elemente, durch welche wir die Veränderlichen repräsentiren, bleibt uns ein gewisser Spielraum in der Bestimmung desjenigen geometrischen Prinzipes, welches der funktionalen

Abhängigkeit der Variabelen entspricht. Jedes solche Prinzip, welches n Elemente, deren jedes eine der n Veränderlichen vorstellt, als nach der Beziehungsgleichung zusammengehörig, einander zuweist, muss sehr einfach sein, damit seine praktische Anwendung mit geringem Zeitaufwand und mechanisch erfolgen kann. Ein durch die Isoplethen der unabhängigen Variabelen bestimmtes Gebilde muss den zugehörigen Funktionswerth anzeigen.

B. Darstellungen durch Kurvenscharen.

Wir betrachten zuerst eine Gleichung mit drei Variabelen. Das einzige praktische Prinzip, um drei Kurven einander zuzuweisen, ist hier die Bedingung, dass sie durch einen Punkt gehen sollen. (Eine gemeinschaftliche Tangente zur Zuweisung zu benutzen, geht deshalb nicht an, weil das Anlegen einer solchen Tangente, etwa eines gespannten Fadens, nach dem Augenmaass zu ungenau wird, besonders, wenn die betreffenden Kurven nicht selbst gezeichnet vorliegen, sondern ihre Lage erst durch Interpolation geschätzt werden muss.) Ein solcher Punkt muss dann durch zwei Linien, welche Bilder eines Werthepaares der unabhängigen Veränderlichen sind, bestimmt sein. Diese Linien sind i. A. gekrümmt; auch wenn die Funktion, deren Werthe durch den Abacus gefunden werden sollen, eindeutig ist, ist es nicht nothwendig, dass die unabhängigen Variabelen x, y durch Gerade dargestellt werden, damit für ein Werthepaar x, y sich nur ein Schnittpunkt ergebe. Für unsere Zwecke sind in diesem Falle vielmehr alle Kurven zulässig, wenn sie nur für das darzustellende Gebiet der Veränderlichen einzelne Schnittpunkte ergeben, oder wenn im Falle mehrerer Schnittpunkte leicht zu entscheiden ist, welcher von ihnen gilt. Auch die physikalischen Formeln ergeben ja häufig mehrere Werthe der Unbekannten, die nicht alle physikalisch einen Sinn haben. Nehmen wir für die unabhängigen Variabelen x, y zwei beliebige Kurvenscharen an und konstruiren die Schnittpunkte für alle Werthepaare x, y, welche einen konstanten Werth z_1 der abhängigen Variabelen z ergeben, so brauchen wir nur die Verbindungskurve aller dieser Punkte als das Bild des Werthes z aufzufassen und das Analoge für die anderen Werthe von z durchzuführen, um einen Abacus der betreffenden Funktion zu erhalten. Man kann so jede Gleichung mit drei Variabelen graphisch wiedergeben und dabei zwei Kurvenscharen beliebig wählen; die dritte ist dann dadurch bestimmt. (Derartige Tafeln sind sehr häufig; jede Erdkarte mit Isohypsen, Isothermen etc. bietet ein Beispiel hierfür.) Am nächsten liegt es, für jene beiden Scharen von Kurven rechtwinklig gekreuzte Parallelen zu nehmen. Solche Tafeln finden sich in grosser Anzahl in dem bereits genannten Buch von Vogler. Ausser der allgemeinen Anwendbarkeit hat die Methode noch den Vorzug, dass man ohne besondere Manipulationen den Funktionswerth direkt aus der Figur ablesen kann. Dagegen ist es schwierig, richtig zu interpoliren. Die Werthe der unabhängigen Variabelen können zwar sicher genug interpolirt werden, da es sich hier nur darum handelt, Abstände von parallelen Geraden nach dem Augenmaass einzutheilen; den Funktionswerth aber muss man mit Hülfe des Abstandes zweier Kurven schätzen, der sich nach allen Richtungen hin ändert. Will man hier Unsicherheiten vermeiden, so ist man oft genöthigt, sehr viele Kurven auszuziehen, was sehr umständlich ist, besonders, wenn diese punktweise konstruirt werden müssen. Um so brauchbarer ist deshalb ein Spezialfall, wo man von der Konstruktion dieser Kurven gänzlich absehen kann, weil sich jede einzelne von ihnen direkt durch einen einfachen Mechanismus reproduziren lässt. Dieses ist dann der Fall, wenn alle Kurven der Schar kongruent sind und die Lage jeder einzelnen schon durch ein Werthepaar der unabhängigen Veränderlichen vollkommen bestimmt ist. Man kann dann nämlich die betreffende Kurve ein für alle Male auf ein Transparent zeichnen und braucht nur dieses in entsprechender Weise auf dem Abacus zu verschieben. Die jedesmalige Lage der Kurve entspricht dann einem bestimmten Funktionswerthe, den man im Schnittpunkte der Kurve mit einer festen Kurve der Tafel aufzeichnet. Ein Beispiel hierfür bietet der Abacus für die Reduktion einer Skalenablesung auf ihren Winkelwerth (s. Theil II), wo sämmtliche Funktionskurven gerade Linien durch einen Punkt sind, sich also leicht durch einen Faden, der in diesem Punkt befestigt ist, herstellen lassen. Durch die Einführung der Messkurve zur Ablesung der Funktionswerthe sind wir bereits zur Darstellung einer Variabelen durch Punkte übergegangen.

Sollen Funktionen von mehr als zwei Variabelen in einer graphischen Tafel mit Kurvenscharen wiedergegeben werden, so kann dies durch wiederholte Anwendung der obigen Methode erreicht werden. Zwei Scharen für die Variabelen x und y bestimmen eine Schar für eine Funktion $f_1(x|y)$, diese Schar bestimmt mit der Schar einer dritten Variabelen z eine neue für eine Funktion $f_2[z|f_1(x|y)]$, die man wieder mit einer

vierten Variabelen kombiniren kann u. s. w. Eine Grenze für die Anzahl der Variabelen, die so abgebildet werden können, ergiebt sich praktisch nur daraus, dass die Tafel um so unübersichtlicher wird, je mehr Kurvensysteme man über einander lagert. Ausserdem nimmt die Unsicherheit des Resultates mit der Anzah der nöthigen Ablesungen zu. Rein theoretisch betrachtet aber lassen sich so alle Fälle darstellen, wo die gesuchte Funktion durch eine endliche Anzahl von Verknüpfungen der unabhängigen Veränderlichen erhalten wird, da man ja auch für eine und dieselbe Variabele mehrere Kurvenscharen anlegen kann. Natürlich wird die Herstellung eines solchen Abacus häufig sehr komplizirt.

C. Darstellungen durch Punktfolgen und Kombinationen von solchen mit Kurvenscharen.

Die Gründe für die Wichtigkeit von Darstellungen durch Punktfolgen sind bereits angegeben worden. Die erste derartige Tafel ist von d'Ocagne [1]) angegeben worden; die erste in Deutschland stammt nach einer Mittheilung von Mehmke von Kutter und Ganguillet.[2]) Ihr folgte die schon erwähnte Barometertafel von Mehmke 1890, und in demselben und im darauf folgenden Jahre hat d'Ocagne [1]) die Theorie solcher Tafeln allgemeiner entwickelt. Das Prinzip, nach welchem er Punkte als nach der Beziehungs-Gleichung zusammengehörig einander zuweist, ist die Bedingung, dass sie auf einer Geraden liegen sollen. Es ist dies allerdings das einfachste Prinzip, kann aber leicht erweitert und verallgemeinert werden, ohne dass seine praktische Verwendbarkeit leidet. Man kann nämlich die Gerade durch eine beliebige Kurve, die „Zuordnungskurve", ersetzen, so dass also zusammengehörige Punkte jedes Mal auf einer solchen Kurve liegen sollen. Von veränderlichen Linien dürften wohl nur die Seilpolygone praktisch verwendbar sein; und auch bei diesen werden die nöthigen Apparate und Manipulationen schon sehr komplizirt.

Viel einfacher aber kann man starre Kurven benützen, indem man sie ein für alle Male auf ein Transparent zeichnet und dieses in geeigneter Weise auf dem Abacus verschiebt. Ist die starre Kurve speziell eine Gerade, so kommt man noch einfacher zum Ziel, indem man einen starken feinen Faden (Seidenfaden oder Pferdehaar) über die Tafel spannt. Eine allgemeine starre Kurve kann in einer Ebene ∞^3 Lagen annehmen, da ein im Transparent festes Koordinatensystem in Bezug auf ein im Abacus festes zwei von einander unabhängige Schiebungen und eine Drehung ausführen kann. Daher ist die Lage einer starren Kurve in der Ebene i. A. durch drei gegebene Punkte, durch welche sie gehen soll, bestimmt. In der That kann man sie an zwei festen Punkten A und B hingleiten lassen, so dass jeder ihrer Punkte einmal mit dem Punkt A zusammenfällt. Dabei wird die Kurve einen Theil der Ebene überstreichen und i. A. eine endliche Anzahl von Malen durch einen dritten Punkt C der Ebene gehen. Nur eine Kurve von konstanter Krümmung (Kreislinie oder Gerade), die sich beim Hingleiten an A und B in sich selbst verschiebt, geht hierbei nicht durch einen beliebigen Punkt C; ihre Lage ist bereits durch zwei Punkte bestimmt. Verwenden wir aber irgend eine andere starre Kurve, z. B. ein Geradenpaar, so können wir mit ihrer Hülfe gewisse Funktionen dreier unabhängiger Veränderlichen bestimmen. Jede Variabele wird durch eine Punktfolge auf einer Kurve repräsentirt; drei solche Punkte bestimmen die Lage der verschiebbaren Kurve, deren Schnittpunkt mit einer vierten festen Kurve den Funktionswerth angiebt. Jeder von vier derartigen Punkten, durch welche die Zuordnungskurve in einer bestimmten Lage geht, kann aber auch als Schnittpunkt zweier Linien gegeben sein, von denen jede das Bild eines Werthes einer Variabelen ist. Dadurch verdoppelt sich die Anzahl der Veränderlichen, so dass wir also nach diesem Prinzip Darstellungen gewisser Gleichungen zwischen acht Variabelen erhalten, die alle durch Kurvenscharen wiedergegeben sind. Welcherlei Funktionen nun lassen sich auf diese Weise graphisch darstellen?

Es sei die Gleichung der verschiebbaren Zuordnungskurve in einer bestimmten Lage, bezogen auf ein im Abacus festes rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$\eta = \varphi(\xi).$$

Verschieben wir dann das Transparent in Richtung der ξ-Axe um die Strecke a, in Richtung der η-Axe um die Strecke b und drehen es um den Winkel ω, so ist die Gleichung der Zuordnungskurve in der neuen Lage:

$$(\eta - b)\cos\omega - (\xi - a)\sin\omega = \varphi\left[(\xi - a)\cos\omega + (\eta - b)\sin\omega\right].$$

---

[1]) M. d'Ocagne, Ann. des Ponts et Chaussées, 2. sem. 1884. — Genie civil, t. XVII, 1890. — Nomographie etc. Paris 1891.

[2]) Ganguillet und Kutter, Ingenieur-Taschenbuch der „Hütte". Berlin 1889.

Die Lage der Kurve soll nun dadurch bestimmt sein, dass sie durch drei gegebene Punkte $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, $\xi_3 \eta_3$ geht, wo ξ_1 und η_1 Funktionen zweier Variabelen $x_1 x_2$, $\xi_2 \eta_2$ Funktionen von $x_3 x_4$ und $\xi_3 \eta_3$ solche von $x_5 x_6$ sind. Die Kurve schneidet dann eine Kurve, die einen bestimmten Werth der Variabelen x_7 angiebt, in einem Punkte $\xi_4 \eta_4$, durch den die Kurve der achten Schar läuft, welche den Funktionswerth x_8 angiebt. ω, a und b sind also so zu bestimmen, dass die vier Gleichungen:

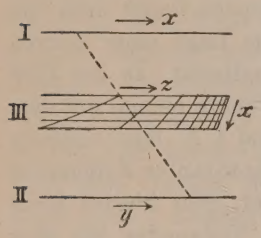
$$\left(\eta_i(x_{2i-1}/x_{2i})-b\right) \cos\omega-\left(\xi_i(x_{2i-1}/x_{2i})-a\right) \sin\omega = \varphi\left[\left(\xi_i(x_{2i-1}/x_{2i})-a\right) \cos\omega+\left(\eta_i(x_{2i-1}/x_{2i})-b\right) \sin\omega\right]$$

für $i = 1, 2, 3, 4$ erfüllt sind, wo x_8 die gesuchte Funktion, die übrigen x die unabhängigen Variabelen sind. Man erhält die Form der so darstellbaren Funktionen, wenn man a, b, ω aus den vier Gleichungen eliminirt. Wählt man z. B. als Zuordnungskurve ein Paar von Geraden, die sich unter dem Winkel α schneiden, und setzt fest, dass die eine Gerade durch die Punkte $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, die andere durch $\xi_3 \eta_3$ und $\xi_4 \eta_4$ gehen soll, so wird das Eliminationsresultat:

$$(\xi_4-\xi_3)\left[(\xi_2 tg\,\alpha-\eta_2)-(\xi_1 tg\,\alpha-\eta_1)\right]+(\eta_4-\eta_3)\left[(\xi_2+\eta_2 tg\,\alpha)-(\xi_1+\eta_1 tg\,\alpha)\right] = 0.$$

Sollen Funktionen von weniger als acht Variabelen zur Darstellung gelangen, so braucht man nur einzelne der Variabelen x_1 bis x_8 einander gleich zu setzen; und zwar kann man hier zwei Fälle unterscheiden. Entweder setzt man zwei Variabelen gleich, die vorher ein Netz aus zwei Kurvenscharen bestimmten, wodurch an Stelle des Netzes eine Kurve tritt, oder man setzt zwei Variabelen aus verschiedenen Netzen einander gleich; dann bleibt die Anzahl der Kurvenscharen ungeändert, aber eine Veränderliche ist durch zwei Scharen dargestellt. Es ist leicht einzusehen, dass mit Benutzung der letzteren Methode alle Funktionen von zwei Variabelen wiedergegeben werden können, und zwar in sehr einfacher Weise. Man kann nämlich als Zuordnungskurve eine Gerade wählen. Bildet man zwei Variabelen x und y durch Maassstäbe auf zwei Geraden I und II *(Fig. 1)* ab und stellt die eine von ihnen, z. B. x, ausserdem durch eine Schar von Geraden III dar, so schneidet die Verbindungsgerade zweier Punkte x_1 y_1 auf I und II die Gerade x_1 der Schar III in einem Punkt, der dem nach der Funktionalbeziehung zu x_1 y_1 gehörigen Werth z_1 entspricht. So erhält man für die Variabele z auf jeder Geraden der Schar III einen Maassstab, und die Isoplethen für z sind Kurven, die mit der Schar III ein Netz bilden. Zu beachten ist bei diesen Darstellungen, dass die Skalen für die Variabele z, welche man auf den Geraden der Schar III erhält, i. A. ungleichförmig sind, d. h. gleichen Intervallen der Veränderlichen entsprechen ungleiche Abschnitte auf der Skale. Derartige ungleichförmige Maassstäbe können aber eine genaue Interpolation gänzlich unmöglich machen, wenn man nicht die Theilung bis zu sehr kleinen Variabelintervallen durchführen und deshalb das Format der Tafel stark vergrössern kann. Man wird darum in jedem einzelnen Falle durch Variation der Verhältnisse die Ungleichförmigkeiten möglichst auszugleichen suchen. Dies kann dadurch geschehen, dass man die Geraden in der Figur durch passende Kurven ersetzt und auf diesen die Maassstäbe entsprechend variirt. Beispiele hierfür geben der Abacus zur Berechnung des Brechungsexponenten aus Beobachtungen nach der Methode des streifenden Eintritts (s. Theil II) und die Abänderung der Multiplikationstafel nach dem Lallemand'schen Verfahren Seite 9. Ferner muss man zu verhüten suchen, dass die Zuordnungsgerade diejenigen Kurven, an denen der gesuchte Funktionswerth abgelesen werden soll, unter zu kleinen Neigungswinkeln treffe, da schleifende Schnitte eine genaue Ablesung sehr erschweren. Endlich ist bei diesen Darstellungen der Nachtheil zu erwähnen, den die Anwendung eines Kurvennetzes mit sich bringt.

Fig. 1.



Dieser Nachtheil kann völlig vermieden werden bei gewissen Gleichungen mit vier und weniger Variabelen. Die so darstellbaren Gleichungen mit vier Variabelen x_1 bis x_4 müssen sich auf die Form der Gleichung bringen lassen, die man durch Elimination von a, b, ω aus den vier Gleichungen:

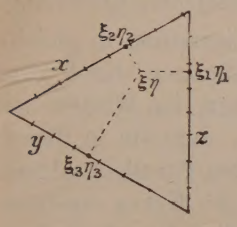
$$(\eta_i-b) \cos\omega-(\xi_i-a) \sin\omega = \varphi\left[(\xi_i-a) \cos\omega+(\eta_i-b) \sin\omega\right] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

erhält, entsprechend der früheren Ableitung. Hier sind ξ_i und η_i beliebige Funktionen der Variabelen x_i. Bei der praktischen Anwendung dieser Methode zeigt sich eine Schwierigkeit. Es erfordert ziemlich viel

Uebung, eine auf ein Transparent gezeichnete, beliebig geformte Kurve rasch so anzulegen, dass sie durch drei gegebene Punkte geht. Bei gewissen Formen der Zuordnungskurve aber gelingt es leicht, hauptsächlich dann, wenn die Kurve aus zwei, drei oder vier Geraden zusammengesetzt ist; hierbei weist man jeder Geraden die Kurve einer Variabelen zu, durch deren Bildpunkte sie laufen soll. Die Gleichungen dieser vier Variabelkurven erhält man, wenn man aus den Gleichungen, die ξ_i und η_i als Funktionen von x_i angeben, x_i eliminirt.

Will man Funktionen von nur zwei Variabelen graphisch wiedergeben, so kann man entweder zwei jener vier Variabelen einander gleich setzen, d. h. für dieselbe Variabele zwei Messkurven anlegen, oder man zeichnet für jede Veränderliche nur eine Messkurve, muss aber dann die dreifache Mannigfaltigkeit der Lagen der Zuordnungskurve auf eine zweifache einschränken. Dies kann man entweder dadurch erreichen, dass man als Zuordnungskurve eine Kurve von konstanter Krümmung wählt, also einen Kreis oder eine Gerade, ein Fall, der weiter unten behandelt wird, oder man muss zwischen den möglichen Translationen und Drehungen des Transparentes eine Beziehung festsetzen. Diese findet ihren analytischen Ausdruck in einer Gleichung zwischen a, b und ω. Praktisch kommt man dadurch zum Ziel, dass man einen bestimmten Punkt des Transparentes auf einer festen Kurve des Abacus laufen, oder eine bestimmte Kurve des Transparentes an einem festen Punkte des Abacus hingleiten lässt. Verlegt man im letzteren Falle den Punkt ins Unendliche, so darf das Transparent nur parallel zu seiner Anfangslage verschoben werden, ω ist konstant. Zu diesem Spezialfall gehört der hexagonale Abacus von Lallemand[1]), bei welchem die Zuordnungskurve aus drei sich unter 60° in einem Punkte schneidenden Geraden besteht. Jeder Geraden des Transparentes ist auf der Tafel eine zu ihr senkrechte Messgerade zugewiesen; diese trägt die Skale für diejenige Variabele, durch deren Bildpunkte die Gerade geht (siehe *Fig. 2*). Diese Tafeln sind ursprünglich nicht als Darstellungen durch isoplethe Punkte gedacht, sondern als solche durch drei Scharen von Parallelen, die sich unter 60° schneiden. In der That ist es auch ganz gleichgültig, wo man diese Parallelen durch die Messgeraden schneidet; man kann jeden Theil einer solchen Skale in der Richtung der Parallelen verschieben, ohne dass die Zuordnung der Punkttripel auf den drei Skalen sich ändert. Dieser ausgezeichneten Eigenschaft der Theilverschiebbarkeit der Skalen (déplacement et fractionnement des échelles) wegen lassen sich derartige Tafeln stets leicht in ein bequemes Format bringen.

Fig. 2.



Noch ein anderer bedeutender Vorzug dieser Tafeln, der bis jetzt noch nicht beachtet worden ist, lässt sich aus derselben Eigenschaft ableiten; man kann alle Messskalen gleichförmig machen, so dass gleichen Aenderungen der Variabelen gleich lange Skalenstücke entsprechen, was für genaue Interpolation und Eintheilung von der grössten Bedeutung ist.

Ehe wir aber zur Ableitung dieser Eigenschaft übergehen, soll angegeben werden, welcherlei Funktionen durch einen hexagonalen Abacus graphisch dargestellt werden können. Denken wir uns die ξ-Axe eines rechtwinkeligen Koordinatensystems den Winkel zweier Messgeraden (Figur 2), z. B. für die Variabelen x und y, halbirend und bezeichnen den Scheitelpunkt des Transparentes mit $(\xi\,\eta)$, die Bildpunkte der Variabelen z, x, y mit $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$, so ist nach der Figur

$$\xi_1 = konst \qquad \xi_2 = \eta_2\sqrt{3} \qquad \xi_3 = -\eta_3\sqrt{3}$$

Liegen $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$ bei einer bestimmten Lage des Transparentes auf den drei Schenkeln der Zuordnungskurve, so ist:

$$\eta = \eta_1 \qquad \frac{\eta_2-\eta}{\xi_2-\xi} = -\sqrt{3} \qquad \frac{\eta_3-\eta}{\xi_3-\xi} = \sqrt{3}$$

Eliminirt man η und alle Grössen ξ, so ergiebt sich:

$$\eta_1 = 2\,(\eta_2+\eta_3).$$

---

[1]) Die Tafeln von Lallemand sind nicht veröffentlicht. Eine kurze Notiz von ihm selbst findet man C.R., CII, S. 816, 1886, Ausführlicheres in dem mehrerwähnten Buche von d'Ocagne, p. 35 ff.

η_1, $2\eta_2$, $2\eta_3$ sind aber die Entfernungen der Punkte $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$ von den Nullpunkten ihrer Skalen (ξ_1.0) resp. (0.0) (0.0); und da man sich auf den Skalen beliebige Funktionen von z, x, y aufgetragen denken kann, so erhält man für die darstellbaren Funktionen die Form:

$$Z = X + Y,$$

wo jeder grosse Buchstabe eine beliebige Funktion des gleichnamigen kleinen ist. Das allgemeine Kriterium dafür, dass sich eine Funktion auf diese Form bringen lässt, sowie das Schema, nach dem man sie eventuell umzuformen hat, lassen sich genau in derselben Weise finden, wie es Lecornu [1]) für die allgemeinere Form $Z_1 X + Z_2 Y = 1$ geleistet hat. Bezeichnet man $\frac{dz}{dx}$ mit p, $\frac{dz}{dy}$ mit q, so ist $\frac{d^2 lg \frac{q}{p}}{dx\,dy} = 0$ die von willkürlichen Funktionen freie Bedingung dafür, dass eine Funktion auf die Form $Z = X + Y$ gebracht werden kann. Um für eine gegebene Funktion, die der Differentialgleichung genügt, die Funktionen XYZ zu bestimmen, bilde man $lg \frac{q}{p}$. Dies muss, da $\frac{d^2 lg \frac{p}{q}}{dx\,dy} = 0$ ist, die Summe zweier Funktionen f und g sein, von denen die erste nur von x, die zweite nur von y abhängt. Man setze:

$$f = -lg\,X' \quad \text{also} \quad X = \int e^{-f} dx$$

$$g = lg\,Y' \quad \text{also} \quad Y = \int e^{g} dy$$

Z ergiebt sich dann aus der Gleichung $Z = X + Y$ mit Benutzung der gegebenen Beziehungsgleichung.

Es soll nunmehr abgeleitet werden, wie man bei den hexagonalen Abaken alle Maassstäbe in gleichförmige umwandeln kann. Wie schon erwähnt, können diese Tafeln auch als Darstellungen durch drei Scharen von parallelen Geraden aufgefasst werden; die Messgeraden dienen also nur dazu, die Werthe der Variabelen, welchen die einzelnen Parallelen entsprechen, anzuzeigen, und es ist klar, dass sie in dieser Eigenschaft durch beliebige Linien ersetzt werden können, die jede Gerade des zugehörigen Parallelstrahlenbüschels nur einmal schneiden. Man kann also auch jede Messgerade durch eine solche Kurve ersetzen, deren Bogenstücke proportional den entsprechenden Aenderungen der durch sie dargestellten Variabele sind. Diese heisse x. Auf der Messgeraden werde nach der darzustellenden Funktionsgleichung eine Funktion $\xi = f(x)$ aufgetragen. Dann haben wir also an Stelle dieser Geraden eine Kurve einzuführen, deren Bogenelement proportional zu dx ist. Dieses Bogenelement in rechtwinkeligen Koordinaten ist $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$. Wir erhalten also die Differentialgleichung:

$$d\xi^2 + d\eta^2 = c^2 dx^2, \quad \text{wo} \quad \xi = f(x)$$

und c ein Proportionalitätsfaktor ist. Man erhält:

$$\eta = \int \sqrt{c^2 - (f'(x))^2}\, dx \quad \text{und} \quad \xi = f(x).$$

Die Elimination von x giebt die Gleichung der Messkurve in rechtwinkeligen Koordinaten.

Als Beispiel benutze ich den Abakus für Multiplikation und Division, der in dem Buche von d'Ocagne [2]) angegeben wird. Die Funktionsgleichung $z = x \,.\, y$ schreiben wir in der Form:

$$lg\,z = lg\,x + lg\,y.$$

Sie kann nun direkt mit der oben angegebenen Gleichung

$$Z = X + Y$$

identifizirt werden, und die Funktionen, welche man auf den drei Messgeraden aufzutragen hat, sind also $lg\,z$, $lg\,x$ und $lg\,y$. In dieser Form findet sich die Tafel bei d'Ocagne ausgeführt; die Skalen für die Fak-

---

[1]) Lecornu C.R., CII, S. 813, 1886.

[2]) l. c. p. 37.

toren sind beim Werth 3 zerlegt, und durch Theilverschiebung ist eine bequeme und übersichtliche Anordnung erreicht. Die logarithmischen Maassstäbe sind aber, besonders bei kleinen Werthen der Numeri, so ungleichförmig, dass die Interpolationen sehr unsichere Resultate ergeben müssen. Wir wollen die ungleichförmigen geraden Skalen durch gleichförmige auf Kurven ersetzen. In den obigen Gleichungen haben wir $f(x) = lg\, x$ zu setzen; und zwar sollen der Einfachheit halber natürliche Logarithmen genommen werden. Wir erhalten:

$$\xi = lg\, nat\, x \qquad \eta = \int \sqrt{c^2 - \frac{1}{x^2}}\, dx .$$

Das unbestimmte Integral ist: $= \sqrt{c^2x^2 - 1} + arc\, sin \frac{1}{cx}$.

Wir setzen $\eta = 0$ für $\xi = 0$, d. h. für $x = 1$. Wählen wir die Konstante $c = 1$, so wird

$$\eta = \sqrt{x^2 - 1} + arc\, sin \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} = \sqrt{x^2 - 1} - arc\, cos \frac{1}{x} .$$

Würde man die ganze Skale in einer solchen Kurve darstellen, so würde sie unhandlich lang werden und für die grösseren Werthe von x zu schleifende Schnitte mit dem sie schneidenden Schenkel der Zuordnungskurve ergeben. Um dies zu vermeiden, theilt man die Skale beim Werth 3 der Variabelen und legt die zweite Hälfte in einem kleineren Maassstabe an. Wir setzen für den zweiten Theil der Skale $c = 1/3$ und $\eta = 0$ für $x = 3$ und erhalten:

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9} - arc\, cos \frac{3}{x} .$$

In dieser Weise ist der Abakus auf Tafel I angelegt. Die Faktoren sind auf den mit A oder B bezeichneten Skalen angegeben, die Produkte auf den mit AA, BB und AB bezeichneten. Die Pfeile an den Endpunkten jeder Skale geben die Richtung des Schenkels der Zuordnungskurve an, der durch ihre Theilpunkte zu legen ist. Um die Parallelverschiebung des Transparentes leicht ausführen zu können, ist eine Schar von Parallelen zu einem Schenkel der Zuordnungskurve gezeichnet, mittelst deren die Richtigkeit der Lage sich leicht kontroliren lässt. Die Tafel kann zur Ausführung von Multiplikationen, Divisionen und zur Ausziehung der Quadratwurzel dienen. Um eine Quadratwurzel auszuziehen, lege man das Transparent so, dass ein Schenkel der Zuordnungskurve auf der Skale AA resp. BB das gegebene Quadrat anzeigt, während der Scheitelpunkt des Transparentes auf die Gerade fällt, zu der die Kurven A symmetrisch liegen, dann treffen die anderen Schenkel die Skalen A resp. B im Wurzelwerth. Da alle Maassstäbe gleichförmig sind, so kann man bei sorgfältiger Zeichnung eine ziemlich beträchtliche Genauigkeit erreichen. Auf einer Tafel im Format 30 cm × 30 cm würde eine Einheit der dritten Dezimalstelle noch in einer Länge von $^1/_3$ mm dargestellt, liesse sich also sicher ablesen. Die Schnitte sind steil genug; der spitzeste auftretende Schnittwinkel beträgt etwa $17^1/_2°$.

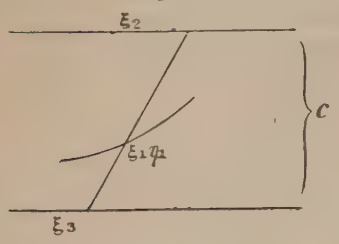
Am einfachsten werden die Manipulationen, falls die Zuordnungskurve eine gerade Linie ist. Die Bedingung dafür, dass drei Punkte $\xi_1\, \eta_1$, $\xi_2\, \eta_2$, $\xi_3\, \eta_3$ auf einer Geraden liegen, lautet:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Je nachdem hier die Koordinaten $\xi_i\, \eta_i$ eines Punktes Funktionen zweier oder einer Variabele sind, erhält man eine Darstellung zweier Variabelen durch Kurvenscharen oder einer Variabelen durch eine krummlinige Skala. Man kann also auf diese Weise Gleichungen mit sechs oder weniger Veränderlichen wiedergeben. Die obige Bedingungsgleichung giebt zugleich die Form derjenigen Funktionen, welche durch derartige Tafeln graphisch aufgelöst werden können. Handelt es sich um Funktionen zweier Variabelen, wobei also der Abakus aus 3 Skalen auf Kurven besteht, so gewinnt ein Spezialfall durch seine Einfachheit und die handliche Gestalt des Tafelformates ein besonderes Interesse, nämlich der, wo zwei Messskalen parallele

Geraden *(Fig. 3)* sind, zwischen denen die dritte Kurve verläuft. Wir können dann $\eta_3 = 0$, $\eta_2 = c$ setzen. Die Bedingung, dass die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist dann:

Fig. 3.



$$\frac{\xi_2 - \xi_3}{c} = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\eta_1}.$$

Sie lässt sich auf die Form bringen:

$$\xi_3 \frac{c - \eta_1}{c\xi_1} + \xi_2 \frac{\eta_1}{c\xi_1} = 1.$$

Sind ξ_1 und η_1 Funktionen von x, dagegen ξ_2 und ξ_3 solche von y resp. z, so ist die Form der in dieser Weise darstellbaren Gleichungen:

$$ZX_1 + YX_2 = 1,$$

wo jeder grosse Buchstabe eine beliebige Funktion des gleichnamigen kleinen bedeutet. Durch Identifiziren der beiden Gleichungen erhält man:

$$\xi_1 = \frac{1}{X_1 + X_2} \qquad \eta_1 = \frac{cX_2}{X_1 + X_2}$$
$$\xi_2 = Y$$
$$\xi_3 = Z \qquad \text{und es ist } \eta_2 = c, \quad \eta_3 = 0.$$

Die Grössen ξ_2 und ξ_3 bestimmen die Lage der Zuordnungsgeraden und können als ihre Koordinaten angesehen werden. d'Ocagne [1]) hat eine Theorie dieser „Parallel-Koordinaten“ gegeben; in Deutschland wurde sie zur selben Zeit von Schwering entwickelt. Die Formel

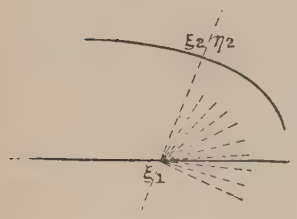
$$ZX_1 + YX_2 = 1$$

bietet den allgemeinen Fall, für den, wie schon oben erwähnt wurde, Lecornu [2]) das Kriterium dafür angegeben hat, wann eine Gleichung auf diese Form gebracht werden kann, und wie man gegebenen Falles dieses Ziel erreicht. Den Abstand der Parallelen, die Theilungen auf ihnen und speziell deren Anfangspunkte wird man so zu bestimmen suchen, dass man auf der Kurve einen möglichst gleichmässigen Maassstab und keine zu schleifenden Schnitte erhält. Die in den Anwendungen gegebenen graphischen Tafeln sind grösstentheils nach diesen Regeln konstruirt.

D. Darstellungen durch Winkel.

Es handelt sich hier um Darstellungen, bei welchen die Winkel, welche den Werth einer Variabelen angeben, nicht auf der Tafel selbst, sondern auf dem verschiebbaren Transparent, abgelesen werden. Da Winkel nur dann sicher abgelesen werden können, wenn ihre beiden Schenkel eine Strecke weit gezeichnet vorliegen, so ist der einzige Fall, welcher hier in Betracht kommen kann, der folgende: Auf der Tafel lässt man eine Variabele auf einer Geraden $\eta_1 = 0$ *(Fig. 4)*, eine andere auf einer Kurve $\eta_2 = f(\xi_2)$ laufen. Auf dem Transparent ist ein Transporteur mit einem verlängerten Schenkel angelegt. Man legt ihn so an, dass der Scheitel auf den Punkt $(\xi_1.0)$ fällt, während der verlängerte Schenkel durch $(\xi_2\ \eta_2)$ geht. Der Winkel zwischen diesem und der Geraden $\eta_1 = 0$ stellt die dritte Variabele dar. Funktionen, die sich so darstellen lassen, müssen sich auf die Form:

Fig. 4.



$$\zeta = \frac{\eta_2}{\xi_2 - \xi_1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\eta_2}{\xi_2} + \xi_1 \cdot \frac{1}{\xi_2} = 1 \quad \text{oder mit anderer Bezeichnung:}$$

$$ZX_1 + YX_2 = 1$$

bringen lassen, wo jeder grosse Buchstabe Funktion des gleichnamigen kleinen ist, und die Variabele z durch den Winkel, y auf der Geraden und x auf der Kurve abgebildet werden. Für derartige Funktionen haben wir schon andere bequemere Tafeln gefunden. Man wird daher diese Darstellung nur dann anwenden, wenn sie besonders günstige Maassstäbe ergiebt, speziell wenn die Winkelskala gleichförmig wird. Es ist dies der Fall, wenn Z proportional *cotg z* ist.

[1]) d'Ocagne, Coordonnées parallèles et axiales. Paris 1885.
[2]) Lecornu, C.R., CII, S. 813, 1886.

E. **Darstellungen durch Abstände** (Bogenstücke).

Werden Bogenstücke auf einer bestimmten Kurve eines Transparentes als Variabele benutzt, so giebt es Gleichungen mit neun Variabelen, welche so mit einmaligem Anlegen aufgelöst werden können. Man denke sich die Lage des Transparentes dadurch bestimmt, dass eine Kurve desselben durch drei bestimmte Punkte der Tafel gehen soll. Diese drei Punkte können durch sechs Variabelen, welche durch Kurvenscharen dargestellt sind, bestimmt sein. Ausserdem seien auf der Tafel noch eine siebente und achte Variabele, beide durch Kurvenscharen wiedergegeben. Der Abschnitt, den zwei bestimmte Kurven dieser Scharen auf einer ein für alle Mal gezeichneten Kurve oder Geraden des Transparentes bestimmen, kann dann also als Funktion von acht unabhängigen Variabelen angesehen werden. Die Methode liefert aber, trotz der grossen Anzahl verfügbarer Funktionen, so komplizirte Verknüpfungen derselben, dass die Praxis wohl niemals zu Abhängigkeiten führen wird, die man auf diese Weise abbilden könnte. Man kommt vielmehr am leichtesten zu praktisch verwendbaren Methoden, wenn man die einfachsten Voraussetzungen macht. Nimmt man an, zwei Variabele laufen auf zwei Kurven, deren Punkte die rechtwinkeligen Koordinaten $\xi_1\ \eta_1$ und $\xi_2\ \eta_2$ haben, und fasst den Abstand zweier solcher Punkte als das Bild der gesuchten Variabele z auf, so ist, falls wir einen beliebig ungleichförmigen Maassstab auf der den Abstand messenden Geraden des Transparentes zulassen, die Beziehungsgleichung:

$$f(z) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2$$

wo $\xi_1\ \eta_1$ beliebige Funktionen der Variabelen x, $\xi_2\ \eta_2$ solche der Variabelen y sind.

Der Maassstab, in welchem die Variabele z auf der messenden Geraden des Transparentes aufgetragen wird, wird durch die Funktion $\sqrt{f(z)}$ angegeben. Es ist leicht die Aufgabe zu formuliren, deren Lösung es gestattet, diesen ungleichförmigen Maassstab durch einen gleichförmigen zu ersetzen. Um dies zu erreichen, muss man sich an Stelle der Geraden, einer Kurve bedienen, deren Bogenlänge, von einem bestimmten Anfangspunkte gemessen, proportional zu z ist, während die Sehne, die den laufenden Kurvenpunkt mit dem Anfangspunkte verbindet $= \sqrt{f(z)}$ ist. Seien η und ξ die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes dieser gesuchten Kurve, c eine Konstante, so sind η und ξ als solche Funktionen von z zu bestimmen, dass die Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 = f(z) \qquad d\eta^2 + d\xi^2 = c^2\, dz^2$$

erfüllt sind. Es sei z. B. die Funktion

$$a^2 \sin^2 z = X + Y$$

graphisch aufzulösen. a bedeute eine Konstante, X und Y seien beliebige Funktionen von x resp. y, die im gebrauchten Intervall der Variabeln nur positive Werthe annehmen. Diese Gleichung lässt sich in der That nach der angegebenen Methode graphisch darstellen; denn sie ist leicht mit der oben gegebenen Gleichung:

$$f(z) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2$$

zu indentifizieren. Man braucht nur zu setzen:

$$f(z) = a^2 \sin^2 z \qquad \xi_1 = \sqrt{X} \quad \eta_1 = 0 \qquad \xi_2 = 0 \quad \eta_2 = \sqrt{Y}$$

Der ungleichförmige Maassstab, den die Funktion $a \sin z$ auf einer den Abstand zweier Punkte $X\ Y$ messenden Geraden bestimmt, geht in einen gleichförmigen über, wenn man die Gerade durch einen Kreis vom Durchmesser a ersetzt.

In der That, setzt man

$$\xi = \frac{a}{2} \sin 2z; \quad \eta = \frac{a}{2}(1 - \cos 2z), \quad \text{so wird:}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 \sin^2 z \quad \text{also} = f(z) \quad \text{und} \quad d\eta^2 + d\xi^2 = a^2\, dz^2,$$

wie es die Bedingungsgleichungen für gleichförmigen Maassstab verlangen. c ist $= a$.

II. Anwendungen.

A. Meteorologische Tafeln.

Die hauptsächlichsten Rechnungen, welche auf den meteorologischen Stationen täglich mehrmals durchgeführt werden, sind die verschiedenen Korrektionen des abgelesenen Barometerstandes und die Berechnungen der Luftfeuchtigkeit aus den Daten der psychrometrischen Instrumente. Zur Erleichterung dieser Rechnungen dienen Zahlentabellen, und zwar sind diese, da es sich stets um Funktionen von wenigstens zwei unabhängigen Variabeln handelt, in der Regel sehr voluminös, sodass man allein mit dem Umblättern und Aufsuchen der gerade nöthigen Theile der Tabelle viel Zeit verlieren kann. Macht man sich Auszüge die die Funktionswerthe nur für grössere Intervalle der Variabeln angeben, so muss man dafür die unbequemen Interpolationen genauer durchführen, und es ist weder Zeit noch Mühe erspart. Für alle diese Rechnungen lassen sich nun graphische Tafeln angeben, welche i. A. das gewünschte Resultat durch einmalige Ablesung mit Hilfe eines gespannten Fadens genau genug ergeben. Wir beginnen mit einer Tafel für die erste Korrektion, die an dem direkt abgelesenen Barometerstande angebracht werden muss, es ist dies die

1. Korrektion des Barometerstandes wegen der Wärmeausdehnung des Quecksilbers und des Maassstabes.

Die Tafel unterscheidet sich nicht wesentlich von der von Mehmke[1]) für diesen Zweck angegebenen. Von dem bei $t°$ Cels. abgelesenen Barometerstande p hat man die Korrektion

$$\varkappa = (0.0_3181 - \beta)\, pt$$

zu subtrahiren, wo 0.0_3181 der Ausdehnungs-Koeffizient des Quecksilbers, β derjenige des Maassstabes ist. Für Messing ist $\beta = 0.0_419$, für Glas $\beta = 0.0_585$ zu setzen. Die darzustellende Gleichung hat aber die Form:

$$\varkappa = \alpha \,.\, p \,.\, t.$$

Die Tafel kann nach der Anordnung auf S. 10 eingerichtet werden, wo zwei Variabele auf parallelen Geraden, die dritte auf einer Kurve zwischen beiden läuft. Wir müssen zu dem Zweck unsere Gleichung mit der dort gegebenen Funktional-Beziehung:

$$ZX_1 + YX_2 = 1$$

identifiziren und schreiben sie deshalb, indem wir noch die verfügbaren Konstanten m, n und d einführen, in der Form:

$$mt \,.\, \frac{\alpha}{m\varkappa(\alpha+d)} + n\left(\alpha+d-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{n(\alpha+d)} = 1$$

Wir haben dann zu setzen:

$$Z = mt \qquad Y = n\left(\alpha+d-\frac{1}{p}\right) \qquad X_1 = \frac{\alpha}{m\varkappa(\alpha+d)} \qquad X_2 = \frac{1}{n(\alpha+d)}$$

Dies ergiebt nach den Formeln Seite 10 für die Koordinaten der Variabelbildpunkte:

$$\xi_1 = \frac{1}{X_1+X_2} = \frac{mn\varkappa(\alpha+d)}{m\varkappa+n\alpha} \qquad \eta_1 = \frac{cX_2}{X_1+X_2} = \frac{cm\varkappa}{m\varkappa+n\alpha}$$

$$\xi_2 = Y = n\left(\alpha+d-\frac{1}{p}\right) \qquad \eta_2 = c$$

$$\xi_3 = Z = mt \qquad \eta_3 = 0.$$

---

[1]) R. Mehmke, Wied. Ann. XLI, S. 892, 1890.

Die ersten beiden Gleichungen ergeben für die Kurve, auf der die Variabele $\varkappa$ dargestellt wird, die Gleichung $\eta_1 = \frac{c}{n(\alpha+d)}\xi_1$, also die Gerade, welche die Bildpunkte der Variabelen-Werthe $t = 0$ und $p = \infty$ verbindet. Die Zahlen m, n und d bestimmen wir so, dass die Maassstäbe für t und p, soweit wir sie nöthig haben, gleich lang sind und sich genau gegenüber liegen. Das Intervall des Barometerstandes brauchen wir nicht grösser als 100 mm, z. B. von 700—800 anzunehmen. Werden kleinere Barometerstände abgelesen, so hilft man sich leicht auf folgende Weise. Die Korrektion ist dem abgelesenen Barometerstand proportional. Ist dieser kleiner als 700 mm, so multiplizire man ihn mit einem Faktor, so dass das Produkt in das angegebene Intervall 700—800 fällt, lese für diesen Barometerstand die Korrektion ab und dividire sie wieder durch den betreffenden Faktor. Als solche Faktoren empfehlen sich 1.1; $^5/_4$; $^3/_2$. Das Temperaturintervall 0° bis 40° reicht aus. Für negative Temperaturen ändert die Korrektion nur ihr Vorzeichen. Wir haben also zu setzen:

$$\left(\frac{1}{700} - \frac{1}{800}\right) n = m \,.\, 40 \qquad\qquad \alpha + d - \frac{1}{700} = 0.$$

Für die beiden Werthe, die α für Glas und Messing annimmt, bleibt alles gleich, nur der Maassstab auf der Geraden $\eta_1 = \frac{c\xi_1}{n(\alpha+d)}$ wird ein anderer. Man trägt den einen rechts, den andern links an der Geraden an. Die absoluten Werthe von m und n ergeben sich daraus, wie lang man die Tafel machen will. Die Gesammtlänge soll 40° Cels. darstellen. Soll $^1/_{10}° = {}^1/_2$ mm sein, so muss also die Tafel 200 mm lang werden. 1 mm des Barometerstandes wird dann an der ungünstigsten Stelle noch in einer Länge von 1.97 mm abgebildet; man kann also auch die $^1/_{10}$ mm des Barometerstandes noch schätzen, während die Korrektion bis auf $^1/_{100}$ mm abgelesen werden kann. Eine solche Tafel in diesen Dimensionen findet man in der Mitte von Tafel II für sich eingerahmt.

Beispiel: $t = 20°$, $p = 760$ mm ergiebt $\varkappa = 2.63$ im Falle eines Glasmaassstabes, $\varkappa = 2.46$ im Falle eines Messingmaassstabes.

2. Reduktion des Barometerstandes auf Meeresniveau und auf die geographische Breite von 45°.

Die Formel, nach welcher diese Reduktion vorgenommen wird, ist durch internationale Festsetzung [1]) vereinbart. Sie ist von Angot angegeben und lautet:

$$\varkappa = p(10^m - 1), \quad \text{wo} \quad m = \frac{h(1+\gamma)}{(1-\beta)[18429.1 + 67.53\,t + 0.003\,h]}.$$

Hier ist

$\varkappa$ die zu dem auf 0° reduzirten Barometerstand p zu addirende Korrektion,

h die Meereshöhe des Barometerortes in Metern,

$\gamma = 0.00259\ cos\ 2\lambda$, wo λ die geographische Breite des Barometerortes ist,

$\beta = 0.378\,\varphi/p$, wo φ die herrschende Spannung des Wasserdampfes in der Luft ist,

t die Temperatur in Centigraden.

Soll zunächst eine graphische Tafel für eine bestimmte meteorologische Station entworfen werden, so sind h und γ konstante Grössen. Da ferner β eine Korrektionsgrösse ist, deren Werth für nicht allzu hoch gelegene Stationen 0.01 nicht übersteigt, so kann man für β einen konstanten Mittelwerth β_0 einführen und dessen Aenderungen dann besonders berücksichtigen. Dann ist m nur noch Funktion von p und t, und die darzustellende Funktion hat die Form:

$$\varkappa = p \,.\, f(t).$$

Man kann also $\varkappa$ und p auf zwei parallelen Geraden in entgegengesetzten Richtungen in gleichförmigem Maassstab auftragen und erhält dann für t eine ungleichförmige Skale auf der Geraden, die die Nullpunkte der Theilungen für $\varkappa$ und p mit einander verbindet. Diese Gerade ändert ihre Lage nicht, wenn man β

[1]) Internationale meteorologische Tabellen, veröffentlicht gemäss einem Beschluss des Kongresses zu Rom im Jahre 1879. Paris 1890.

einen anderen Werth β_1 giebt; wohl aber ändert sich der Maassstab auf ihr. Man kann aber diesem Einfluss einer Aenderung von β auch dadurch Rechnung tragen, dass man den Temperaturmaassstab ungeändert lässt, wie er für den konstanten Werth β_0 entworfen wurde; an Stelle der gegebenen Temperatur t aber eine Temperatur t_1 benützt, welche dadurch bestimmt ist, dass m für das Werthepaar t_1 und β_0 denselben Werth wie für das Werthepaar t und β_1 annimmt. Zur Bestimmung der Korrektion (t_1-t) als Funktion von β dient, da β selbst Funktion zweier Variabelen, nämlich der Dampfspannung φ und des Barometerstandes p ist, am besten ein Abakus. Man trägt φ und p auf parallelen Geraden in entgegengesetzten Richtungen in gleichförmigen Maassstäben auf (für p benutzt man einfach denselben, den wir schon gemäss der Gleichung $\varkappa = p \,.\, f(t)$ angelegt haben), und kann dann auf der Geraden, die die Nullpunkte beider Theilungen verbindet, eine Skale für jede beliebige Funktion von φ/p anlegen. Nun ergiebt sich aus der Gleichung $(1-\beta_0)\,(a+t_1) = (1-\beta_1)\,(a+t)$ die verlangte Korrektion der Temperatur $(t_1-t) = -\dfrac{(a+t)\,(\beta_1-\beta_0)}{1-\beta_0}$, wo a ungefähr $= 273$ ist, $(a+t)$ sich also wenig von der absoluten Temperatur unterscheidet. (t_1-t) hängt also ausser von $\beta = \varphi/p \,.\, 0.378$ noch von t ab. $(a+t)$ schwankt um etwa $^1/_5$ seines Werthes; bezeichnen wir seinen kleinsten und grössten Werth mit $(a+t_{\text{Min}})$ resp. $(a+t_{\text{Max}})$ und legen für die Korrektion (t_1-t) auf der Geraden zwei Skalen an, eine für den Werth $\left[a+t_{\text{Min}}+{}^1/_4(t_{\text{Max}}-t_{\text{Min}})\right]$, die andere für den Werth $\left[a+t_{\text{Min}}+{}^3/_4(t_{\text{Max}}-t_{\text{Min}})\right]$, so erhalten wir auch für jeden andern Werth von t mit Hülfe einer dieser Skalen die Korrektion (t_1-t) bis auf $^1/_{20}$ ihres Werthes genau. Da ihr Werth nur in extremen Fällen 2° übersteigt, so beträgt der grösste Fehler, den wir dadurch machen, $^1/_{10}°$. Nach diesen Prinzipien ist die Tafel II angelegt. Sie giebt die Reduktion des Barometerstandes auf Meeresniveau für die meteorologische Station im Strassburger Universitätsgebäude. Die gebrauchten Konstanten sind:

$$h = 145.7^{\text{met}}, \qquad \lambda = 49°\,35', \qquad \text{Mittelwerth für } \beta = 0.005.$$

Die beiden Temperaturen, für welche die beiden Skalen für die Korrektion wegen der Luftfeuchtigkeit gelten, sind $-5°$ und $+20°$. Sie liegen etwa um $^1/_4$ der Maximal-Jahresschwankung von den Jahresextremen entfernt. Will man also die Korrektion wegen der Feuchtigkeit berücksichtigen, so verfährt man wie folgt: Nachdem durch Ablesung mittelst eines gespannten Fadens auf dem in der Mitte eingerahmten Theil der Tafel der direkt abgelesene Barometerstand auf 0° reduzirt ist, klemmt man den Faden an dem Punkt der Barometerskale I, der diesen korrigirten Barometerstand giebt, mit dem Fingernagel an, dreht ihn gespannt darum, bis er durch den Punkt geht, der auf der Dampfspannungsskale II deren Werth φ angiebt. Dann liest man an der Skale III links oder rechts, je nachdem die Temperatur näher an $-5°$ oder $+20°$ liegt, die Temperatur-Korrektion (t_1-t) ab, bringt diese an der Temperatur an und dreht den gespannten Faden so, dass er die Temperaturskale IV in der korrigirten Temperatur trifft; er bestimmt dann auf der Skale V die gesuchte Korrektion. Meist ist die Feuchtigkeits-Korrektion sehr klein, man braucht dann nur den Punkt auf I direkt mit der unkorrigirten Temperatur auf IV zu verbinden und kann die Barometer-Korrektion auf V unmittelbar ablesen. Immerhin kann man sich durch einen flüchtigen Blick von der Grösse der Temperatur-Korrektion überzeugen, da dies ja, weil der eine Endpunkt des Fadens bei beiden Spannungen derselbe ist, ohne jeden Zeitaufwand geschehen kann. Die Barometer-Korrektion kann bis auf $^1/_{100}$ mm abgelesen werden; i. A. wird man sie aber nicht genauer als bis auf $^1/_{10}$ mm brauchen.

Beispiel: Es sei der wegen der Wärmeausdehnung korrigirte Barometerstand $p = 730$ mm, die Dampfspannung $\varphi = 24$ mm, die Temperatur $t = 28°$. p auf I verbunden mit φ auf II liefert auf III $t_1 - t = -2.2$. p auf I mit $t_1 = 25.8$ auf IV verbunden ergiebt auf V $\varkappa = 12.3$; also p (korrigirt) $= 742.3$. Ohne Berücksichtigung von φ hätte man p (korrigirt) $= 742.2$ gefunden.

Noch eine Frage ist zu entscheiden. Ist es vortheilhafter die Tafel breiter oder schmäler zu nehmen? Der Abstand der Skalen I und V ist von Einfluss auf die Temperaturskale auf IV. Wir wollen sehen, wie diese sich ändert, wenn man die Skale V festhält und I ihr nähert. Die Gerade IV beschreibt dann einen Strahlenbüschel, dessen Zentrum der Nullpunkt der Skale V ist. Einen bestimmten Temperaturpunkt t_0 auf IV bestimmen wir als Schnitt dieser Geraden mit der Verbindungsgeraden des Punktes 750 auf I mit dem Punkte auf V, der die zu 750 und t_0 gehörige Korrektion $\varkappa_0$ angiebt. Bei der Bewegung von I beschreibt diese Verbindungsgerade einen Strahlenbüschel, dessen Zentrum $\varkappa_0$ ist. Beide Strahlenbüschel sind perspektiv, denn sie projiziren die beiden parallelen und perspektiven Punktreihen, welche die Punkte $p = 0$ und $p = 750$ bei der Parallelverschiebung ihrer Verbindungslinie beschreiben und haben den Verbindungsstrahl ihrer Centra, die Axe der $\varkappa$ entsprechend gemein, erzeugen also eine gerade Linie. Diese Gerade steht

senkrecht auf der Axe V der x, da, wenn der Abstand zwischen der x-Axe und p-Axe ∞ geworden ist, die zwei Strahlen der Strahlenbüschel parallel und senkrecht zur x-Axe sind. Die Theilpunkte der Temperaturskale bewegen sich also bei veränderlicher Breite der Tafel auf Geraden senkrecht zur x-Axe V. Die Verhältnisse der Theile der Temperaturskale ändern sich dabei überhaupt nicht, ihre absolute Grösse nimmt aber mit wachsender Tafelbreite zu, weil die Neigung der Temperaturskale gegen die x-Axe damit zunimmt. Da zugleich mit zunehmender Breite des Abakus die Schnittwinkel des gespannten Fadens mit der Axe der x immer weniger von einem Rechten abweichen, so wird man die Tafel so breit machen, als es die Handlichkeit des Formates und die mit der Länge des Fadens abnehmende Sicherheit im Anlegen desselben gestatten.

3. Allgemeine Barometertafel.

Auf den meteorologischen Zentralstellen wird man eine Tafel verlangen müssen, die für jede Meereshöhe und geographische Breite die Reduktion des Barometerstandes rasch auszuführen gestattet. Die Reduktion geschieht nach der Formel von Angot:

$$x = p\,(10^{m}-1), \quad \text{worin } m = \frac{h\,(1+\gamma)}{(1-\beta)\,(18429.1+67.53\,t+0.003\,h)}\,.$$

Die Bedeutung der Buchstaben siehe auf Seite 13.

Das Glied $0.003\,h$ kann man i. A. vernachlässigen; bei sehr grossen Meereshöhen berücksichtigt man seinen Einfluss dadurch, dass man an Stelle des gegebenen Werthes t den Werth $t+\frac{0.003\,h}{67.53}$ $\quad t+\frac{4\,h}{90000}$ einsetzt, was erst bei Höhen über 2000^{met} $^1/_{10}{}^\circ$ ausmacht.

Dem Einfluss der geographischen Breite und der Feuchtigkeit tragen wir dadurch Rechnung, dass wir die Meereshöhe h durch eine korrigirte h' ersetzen, wo

$$h' = h\,\frac{1+\gamma}{1-\beta} \quad \text{ist.}$$

Dies geschieht am bequemsten mit Hülfe eines kleinen Abakus, der die prozentische Feuchtigkeitskorrektion der Höhe $+\frac{100\,\beta}{1-\beta} = \frac{37.8\,\varphi}{p-0.378\,\varphi}$ als Funktion der Dampfspannung φ und des Barometerstandes p bestimmen lässt, und mit Hülfe einer Zahlentabelle, die die Breitenkorrektion $+1000\,\gamma = 2.59\,\cos 2\lambda$ in $^0/_{00}$ derselben giebt.

Die darzustellende Gleichung hat die Form:

$$x = p\left(10^{\frac{h'}{f(t)}}-1\right), \quad \text{wo } f(t) = 18429.1+67.53\,t.$$

Schreibt man sie in der Form: $lg\,(p+x)-lg\,p-\frac{h'}{f(t)} = 0$, so ist leicht einzusehen, dass man sie für $h' = const.$ durch einen Abakus darstellen kann, auf dem die drei Variabelen $(p+x)$, p und t durch Punktfolgen auf drei parallelen Geraden abgebildet sind. Dabei kann man die Skalen für p und t auf zwei beliebigen Parallelen anlegen, während der Abstand der Skale für $(p+x)$ von einer der andern Parallelen von dem speziellen Werthe von h' abhängt. Für die beiden Intervalle von h' und $(p+x)$ erhält man somit ein Netz von zwei Geradenscharen, einer Schar von Parallelen und einer von Geraden, die nach einem ziemlich fernen Punkt konvergiren. Man kann so zu einem Werthtripel p, t, h' den zugehörigen korrigirten Barometerstand $(p+x)$ durch eine einzige Fadenspannung ermitteln. Diese Anordnung hat aber die Nachtheile, dass die Herstellung eines Geradennetzes sehr umständlich und die Ablesung wegen der schwierigeren Interpolation unsicher ist.

Viel einfacher und genauer kommt man zum Ziel, wenn man zwei Fadenspannungen zu Hülfe nimmt, mit deren erster man aus t und h' den Werth von m bestimmt, um mittelst desselben und des Werthes von p denjenigen von x durch die zweite Fadenspannung zu erhalten. Eine solche Anordnung, die auf sehr kleinem Raum die Bestimmung der Korrektion bis zu Höhen von 3000^{met} mit ausreichender Genauigkeit gestattet, zeigt Tafel III.

Die Höhenskale h' geht zunächst nur bis 300^{met}, und zwar in homogenem Maassstabe. Parallel zu ihr läuft in entgegengesetzter Richtung die Temperaturskale t für die Funktion $f(t) = 18429.1+67.53\,t$, also

ebenfalls homogen. Man findet dann $m = \frac{h'}{f(t)}$ auf der Geraden m_t, die die Punkte $f(t) = 0$ und $h' = 0$ mit einaner verbindet. Auf dieser sind statt der sehr kleinen Werthe von m selbst die von $5000 . m$ angeschrieben. Die Skale für h' wird zugleich als solche für $\varkappa$ benutzt und parallel zu ihr läuft die Garade p_1, welche in entgegengesetzter Richtung eine homogene Skale für p (650—800 mm) trägt. Auf der Geraden m_1, welche die Nullpunkte beider Skalen verbindet, erhält man die Theilpunkte für (10^m—1), an welchem wiederum die zugehörigen Werthe von $5000 . m$ angeschrieben sind. Man suche also den Werth, den der durch die Bildpunkte von h' und t gespannte Faden auf m_t bestimmt, auf m_1 auf und verbinde den entsprechenden Bildpunkt auf m_1 mit dem von p auf p_1; der gespannte Faden trifft die Höhenskale im Bildpunkt der Korrektion $\varkappa$. Da aber diese in einem 10 Mal grösseren Maassstab aufgetragen ist als die Höhenskale selbst, so ist die gefundene Zahl durch 10 zu dividiren. Selbst im vorliegenden kleinen Format wird die Korrektion in 5facher Vergrösserung erhalten.

Um das Höhenintervall über 300 met zu erweitern, ist die Höhenskale gleichzeitig als eine solche aufgefasst, die bis 1500 reicht; um die Zahlen zur Uebereinstimmung zu bringen, muss man also die wirklichen Höhen mit 0.2 multipliziren. Man erhält so wieder auf m_t Zahlenwerthe für m, und zwar sind nun statt m selbst die Werthe $0.2 . 5000\, m = 1000 . m$ angeschrieben. Eine weitere Skale für p, p_5 umfasst ein entsprechend grösseres Druckintervall (600—800 mm) und auf der Geraden m_5, die den Nullpunkt dieser Skale mit dem der Höhenskale verbindet, erhält man eine neue für (10^m—1), auf der wieder die entsprechenden Werthe von $1000\, m$ angeschrieben sind. Bestimmt man analog wie vorher mit Hülfe dieser Skale und des Werthes von p auf p_5 die Korrektion $\varkappa$, so ist der gefundene Zahlenwerth, weil statt der Höhen ihr 0.2facher Werth dasteht und die Korrektionsskale den 10fachen Maassstab der Höhenskale hat, durch $0.2 . 10 = 2$ zu dividiren.

In ganz analoger Weise dienen die Geraden p_{10} und m_{10} zur Berechnung der Korrektion für Höhen bis 3000 met und Barometerstände bis 500 mm. In diesem Falle hat man den 0.1fachen Werth von h' auf der Höhenskale mit dem Bildpunkte der Temperatur t zu verbinden, um auf m_t den Werth von $500 . m$ zu erhalten. Diesen sucht man auf m_{10} auf, verbindet ihn mit dem Werth p auf p_{10} und erhält auf der Höhenskale den Werth der Korrektion $\varkappa$, der durch $0.1 . 10 = 1$ zu dividiren ist, d. h. richtig angegeben wird. Praktisch reicht es vollkommen aus, den Abakus doppelt so gross anzulegen, als er hier vorliegt; man erhält dann bis zu Höhen von 300 met die Korrektion in 10facher, von 300—1500 met in doppelter Vergrösserung und darüber hinaus in natürlicher Grösse. Eine solche Genauigkeit ist bei der unsicheren Kenntniss der Mitteltemperatur der Luftsäule völlig ausreichend. Bei extrem niederen Temperaturen versagt die Tafel an den oberen Grenzen der Höhenintervalle. Im äussersten Falle, wenn die Mitteltemperatur der Luftsäule —35° und der auf Meeresniveau reduzirte Barometerstand = 694 mm, dem bis jetzt beobachteten Minimum [1]) ist, reicht die Tafel immer noch für Meereshöhen bis 2300 met aus; bei durchschnittlichen Temperaturen und Drucken ist sie bis 3000 met verwendbar. Auf dem Blatt bleibt Platz genug für einen kleinen Abakus, der die prozentige Feuchtigkeitskorrektion der Höhe als Funktion der Dampfspannung φ und des Druckes p ergiebt, und für eine Tabelle der Breitenkorrektion der Höhe.

Als Beispiel diene dasselbe wie auf Seite 14. Wir haben also zu setzen:

$$h = 145.7\,\text{met};\quad \lambda = 48°\,35';\quad \varphi = 24\,\text{mm};\quad t = 28°;\quad p = 730\,\text{mm}.$$

Der Abakus ergiebt als Feuchtigkeitskorrektion +1.38 %, die Tabelle als Breitenkorrektion —0.3 ‰; also wird $h' = 147.7$. $t = 28$ und $h' = 147.7$ bestimmen auf m_t $5000\, m = 36.6$. 36.6 auf m_1 und 730 auf p_1 ergeben $\varkappa = 12.35$, also den korrigirten Barometerstand $p + \varkappa = 742.35$ mm. Hätte man die Höhe gar nicht korrigirt, so wäre 742.2 mm erhalten worden, alles in Uebereinstimmung mit Seite 14.

Selbstverständlich kann die Tafel auch zur Berechnung barometrischer Höhenmessungen dienen. Man sucht den durch 0.1 resp. 0.2 oder 1 dividirten Werth der beobachteten Druckdifferenz auf der Geraden $\varkappa$ auf und verbindet den betreffenden Punkt mit dem Bildpunkt des Barometerstandes p der höheren Station auf der Geraden p_1 resp. p_5 oder p_{10}. Die am Schnittpunkte des Fadens mit der zugehörigen Geraden m_1 resp. m_5 oder m_{10} abgelesene Zahl sucht man auf m_t und verbindet den Bildpunkt mit dem der Mitteltemperatur der Luftsäule auf t. Der Faden bestimmt dann auf der Höhenskale $^1/_1$ resp. $^1/_5$ oder $^1/_{10}$ des Betrages der Höhendifferenz.

[1]) van Bebber, Handbuch der ausübenden Witterungskunde, II., S. 183. Stuttgart 1886.

4. Psychrometertafel.

Die Dampfspannung e_τ, welche in der Luft herrscht, lässt sich nach den Formeln

$$e_\tau = e_{t'} - \frac{0.480}{700} p\,(t-t'), \quad \text{wenn } t' < 0$$

$$e_\tau = e_{t'} - \frac{0.480}{600} p\,(t-t'), \quad \text{wenn } t' > 0$$

berechnen. Hier bedeuten:

t resp. t' die Temperatur des trockenen resp. feuchten Thermometers eines August'schen Psychrometers, in Celsiusgraden gemessen,

$e_{t'}$ die Maximalspannung des Wasserdampfes bei der Temperatur t'

und p den Barometerstand, beide in Millimetern gemessen.

Eine Funktion der thatsächlich vorhandenen Dampfspannung e_τ ist der Taupunkt τ, nämlich die Temperatur, bei welcher die Maximalspannung des Dampfes $= e_\tau$ ist. Ferner ergiebt sich die relative Feuchtigtigkeit $r = 100\,\frac{e_\tau}{e_t}$, wo e_t die Maximalspannung bei der Temperatur t ist. Die nach diesen Formeln berechneten Tafeln [1]), welche für die Intervalle

$$-30 < t' < 31 \qquad -30 < t < 40$$

e_τ in $^1/_{10}{}^{mm}$ und r in ganzen Zahlen geben, sind sehr voluminös; sie enthalten 74 Folioseiten.

Setzen wir zunächst p konstant, so entspricht die Formel wieder einer Darstellung durch drei parallele Geraden; denn bezeichnen wir die Konstante $\frac{0.480}{700}$ resp. $\frac{0.480}{600}$ mit α, und $(e_{t'} + \alpha p t')$ mit $f(t')$ und führen die verfügbaren Konstanten n, m und q ein, so können wir die Beziehungsgleichung in der Form:

$$m e_\tau - \Big(m f(t') + qp\Big) + \Big(m\alpha p t + qp\Big)\frac{n}{n} = 0$$

schreiben, was sich leicht mit der oben angegebenen Bedingung dafür, dass drei Punkte $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$ der Parallelen $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \delta$, $\eta_3 = d$ in einer Geraden liegen:

$$\xi_1 - \frac{d}{d-\delta}\xi_2 + \frac{\delta}{d-\delta}\xi_3 = 0$$

identifiziren lässt. Wir setzen

$$\eta_1 = 0 \qquad \xi_1 = m \,.\, e_\tau$$

$$\eta_2 = \delta \qquad \xi_2 = \frac{d-\delta}{d}\Big(m f(t') + pq\Big)$$

$$\eta_3 = d \qquad \xi_3 = \frac{m\alpha \,.\, t + q}{n}$$

$$\text{und also} \qquad \delta = \frac{np}{np+1}\,d.$$

e_τ und t werden also in gleichförmigen Maassstäben auf zwei Parallelen im konstanten Abstand d aufgetragen, während der Abstand δ der dritten Parallele, die die Skale für t' trägt, eine Funktion des Barometerstandes p ist. Ehe man die verfügbaren Konstanten bestimmt, ist zu überlegen, wie die relative Feuchtigkeit r dargestellt werden soll. Da sie proportional dem Quotienten der Grössen e_τ und e_t ist, so ist es am einfachsten, diese auf zwei parallelen Geraden in entgegengesetzten Richtungen aufzutragen und die Nullpunkte ihrer Skalen durch eine Gerade zu verbinden; auf dieser erhält man dann eine Skale für r. Da α für $t' > 0$ und $t' < 0$ verschiedene Werthe besitzt und hauptsächlich, weil die Aenderungen der Maximal-

[1]) Psychrometertafeln für das 100-theilige Thermometer, nach Dr. H. Wild's Tafeln bearbeitet von Jelinek. Leipzig 1887.

spannungen bei niederen Temperaturen sehr klein sind, so dass hier die Thaupunktskalen sehr ungünstig werden, empfiehlt es sich, die Tafel in zwei Theilen anzulegen. In dem Theile für $t' < 0$ muss der Maassstab für die Dampfspannung des Thaupunktes stark vergrössert werden. Man kann diese Dampfspannungsskalen auf einer Geraden nach entgegengesetzten Richtungen hin antragen, so dass ihre Nullpunkte zusammenfallen. Von diesem Nullpunkte geht für beide Hälften der Maassstab der relativen Feuchtigkeit aus; man braucht deshalb für diesen nur eine Gerade zu wählen. Will man auch mit einer einzigen Theilung auf dieser Geraden auskommen, so müssen die Maassstäbe für e_t und e_τ auf beiden Theilen im gleichen Verhältnisse stehen. Dadurch, dass nun noch die Bedingung gestellt wird, die Gesammtlänge der beiden Maassstäbe für e_t, von denen ebenfalls jeder die Verlängerung des andern bildet, solle ebenso gross wie die der beiden Maassstäbe für e_τ sein, während zugleich die Grenzen für die Variabelen bestimmt sind, ergiebt sich die Eintheilung des Abakus. Mit dem Barometerstande ändert sich die Lage und Eintheilung der Skale für t'. Die Theilpunkte sind sehr leicht konstruktiv zu erhalten, da der Bildpunkt einer bestimmten Temperatur t' in einer Geraden mit den beiden Punkten auf den Skalen für e_t und e_τ, die derselben Temperatur entsprechen, liegt. Tafel IV giebt ein verkleinertes Bild eines solchen Abakus. Die Skalen mit dem Index a entsprechen dem Falle $t' > 0$, diejenigen mit dem Index b $t' < 0$. Die Vergrösserungszahlen der einzelnen Maassstäbe sind die folgenden:

Für $t' > 0$: Maassstab für t auf Gerade Ia: 18fach, für e_τ auf Gerade IIIa: 24fach, für e_t auf Gerade IVa: 15fach,
„ $t' < 0$: „ „ t „ „ Ib: 22.2fach, „ „ „ „ IIIb: 120fach, „ „ „ „ IVb: 75fach.

Da $\frac{24}{15} = \frac{120}{75}$, so erhält man für r auf Gerade V nur einen Maassstab. Zum Ablesen hat man also folgendermaassen zu verfahren: Man verbindet die Temperatur des trockenen Thermometers auf I mit derjenigen des feuchten auf derjenigen Geraden der Schar II, die dem Barometerstand entspricht. Die Verbindungsgerade trifft die Gerade III in einem Punkte, der nach der einen Skale den Thaupunkt, nach der andern die Dampfspannung der Luft angiebt. Dreht man dann den gespannten Faden um diesen Punkt, bis er die Gerade IV im Punkte der Temperatur des trockenen Thermometers trifft, so giebt sein Schnittpunkt mit der Geraden V die relative Feuchtigkeit an. Ungünstig für das erste Anlegen des Fadens ist hier, dass im Fall $t' < 0$ die Parallelenschar II ziemlich nahe an der Geraden I liegt. Dies kann man verbessern, wenn man beim Anlegen der Tafel in grösserem Maassstabe die Skale für t stärker als diejenige für e_τ vergrössert. Die unsicheren Schnitte, welche bei der Bestimmung der relativen Feuchtigkeit in sehr niederen Temperaturen eintreten, sind nur durch Vergrössern der Maassstäbe für e_t und e_τ zu verbessern. Sie entsprechen übrigens ganz den physikalischen Verhältnissen, da bei so niederen Temperaturen eine kleine Aenderung der Differenz von e_t und e_τ schon einen starken Einfluss auf den Werth der relativen Feuchtigkeit hat, so dass diese auch thatsächlich weniger genau bestimmt werden kann.

Auch zur Berechnung von Beobachtungen mit dem neuerdings von R. Assmann [1]) angegebenen Aspirations-Psychrometer kann die Tafel dienen. Die Formel, welche Assmann für den Apparat angiebt, unterscheidet sich nämlich von der Regnault'schen nur durch den andern Werth der Konstanten α; sie lautet:

$$e_\tau = e_{t'} - \frac{1}{2}(t - t')\frac{p}{755}.$$

Es verschieben sich dadurch nur die Parallelen der Schar II, die Isoplethen des Barometerstandes. Man kann die Geraden, die der Assmann'schen Formel entsprechen, mit einer andern Farbe einzeichnen oder, falls sie mit Linien, die sich auf das August'sche Psychrometer beziehen, koinzidiren, hinter deren Isoplethenzahlen diejenigen nach der Assmann'schen Formel in Klammer setzen, wie es auf Tafel IV geschehen ist.

Ist die Tafel auf Millimeterpapier in grösserem Maassstabe angelegt, so kann man auch die absolute Feuchtigkeit und den Sättigungsdefekt (Ueberschuss der Sättigungsmenge über die absolute Feuchtigkeit) aus ihr entnehmen, wenn man über der Geraden I als Abscissen zwei Kurven zeichnet, deren Ordinaten nach ihrer Länge in Millimetern die Sättigungsmengen zu den Temperaturen auf den Abscissen angeben. Dann ergiebt die Länge der Kurvenordinate, deren Abscisse die Thaupunktstemperatur angiebt, die absolute Feuchtigkeit bis auf die Korrektion $-0.4\,(t-\tau)\,\%$; den korrigirten Werth bestimmt auf der Kurvenordinate ein Faden, der folgende beiden Punkte A und B verbindet: A. Ordinate = Kurvenordinate, Abscisse um

[1]) Abhandlungen des königl. preussischen meteorologischen Institutes, Bd. I, S. 235.

$(t-\tau)$ Millimeter grösser (oder kleiner) als die des Kurvenpunktes; *B.* Ordinate = 0, Abscisse 250 (bei sehr grosser Trockenheit 270) Millimeter kleiner (oder grösser) als die von *A*. Einen andern Abakus zur Bestimmung der absoluten Feuchtigkeit aus t und τ findet man in dem Buche von d'Ocagne p. 24 und Tafel I.

Beispiel: Am August'schen Psychrometer sei $t = 25°$, $t' = 20°$ bei einem Barometerstande von 750 mm abgelesen worden. Die Verbindungsgerade der Punkte ($t = 25$) auf Gerade I und ($t' = 20$) auf der mit 750 bezeichneten Geraden der Schar II bestimmt auf Gerade III den Thaupunkt $\tau = 17°$ und die Dampfspannung $e_\tau = 14.4$ mm. Der entsprechende Punkt auf III verbunden mit dem Punkt ($t = 25°$) auf IV liefert auf V die relative Feuchtigkeit $r = 61\,\%$.

B. Physikalische Tafeln.

5. Tafel zur Berechnung der Luftdichtigkeit und zur Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm Druck.

Die auf Wasser von 4° bezogene Dichtigkeit der trockenen atmosphärischen Luft bei der Temperatur t und dem wegen der Wärmeausdehnung korrigirten Barometerstand p ist:

$$\lambda = \frac{0.001293}{1+0.00367\,t} \cdot \frac{p}{760},$$

wo 0.00367 der Ausdehnungs-Koeffizient der Luft ist. Da die übrigen Gase in den Grenzen, innerhalb derer sie dem Mariotte'schen Gesetze folgen, denselben Ausdehnungs-Koeffizient besitzen, so tritt stets derselbe Faktor:

$$\varkappa = \frac{p}{(1+0.00376\,t)\,760}$$

auf, so oft ein bei irgend einer Temperatur und irgend einem Drucke bestimmtes Volumen oder spezifisches Gewicht eines Gases auf 0° und 760 mm Druck reduzirt werden soll. Im Falle eines Volumens hat man mit $\varkappa$ zu multipliziren, im Falle des spezifischen Gewichtes mit $\varkappa$ zu dividiren. Man kann einen und denselben Abakus zur Bestimmung von λ und $\varkappa$ verwenden, wenn man auf der Kurve der gesuchten Funktion zwei Skalen, eine für λ und eine für $\varkappa$ anlegt. Da die Gasvolumina oder spezifischen Gewichte, die mit $\varkappa$ zu multipliziren resp. zu dividiren sind, in der Regel mehrstellige Zahlen sind, wird man die Rechnung mit Hülfe von Logarithmen ausführen, und deshalb ist es zweckmässiger, an Stelle der Skale für $\varkappa$ selbst eine solche für $\log \varkappa$ zu zeichnen. Man trägt p und $1+0.00367\,t$ auf zwei Parallelen in entgegengesetzter Richtung auf und erhält auf der Verbindungsgerade der Nullpunkte dieser Skalen die Maassstäbe für λ und $\log \varkappa$. Auf Tafel V ist die Temperaturskale in vier Theile, I, II, III, IV, zerlegt, entsprechend den Intervallen 0°—30°, 30°—60°, 60°—90°, 90°—120°. Demgemäss erhält man auch vier Skalen I, II, III, IV für den $\log \varkappa$. Die Skale für λ ist nur für das Intervall 0°—60° gezeichnet, sollte λ einmal für höhere Temperaturen gebraucht werden, so kann man es leicht mittelst des entsprechenden Werthes von $\varkappa$ berechnen. Das Barometerintervall geht von 700—790 mm. λ kann sicher bis auf die vierte Stelle abgelesen werden, bei $\log \varkappa$ wird diese Stelle auf 2 bis drei Einheiten unsicher. Die Tafel entspricht den beiden Tabellen 6 und 7, welche dem Leitfaden der praktischen Physik von F. Kohlrausch angehängt sind.

Beispiel: Bei 43°5 und 743 mm Druck ergiebt sich die Luftdichtigkeit $\lambda = 0.001090$ und der Logarithmus des Reduktionsfaktors $\log \varkappa = 0.9257-1$. Diese Resultate liest man an der zweiten Geraden der Schar *B* ab, da der Bildpunkt von $t = 43°5$ auf der zweiten Geraden der Schar *A* liegt.

6. Tafel zur Reduktion einer Skalenablesung auf ihren Winkelwerth.

Hat man mit Fernrohr, Spiegel und Skale einen Ausschlag von e Skalentheilen beobachtet und ist die Skale vom Spiegel *A* Skalentheile entfernt, so ergiebt sich der Ausschlagwinkel φ aus der Gleichung:

$$tg\,2\varphi = \frac{e}{A}.$$

Trägt man also in rechtwinkeligen Koordinaten *A* als Abscisse und e als Ordinate auf, so sind die Kurven, für welche φ einen konstanten Werth hat, gerade Linien, welche alle durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen. Man kann also mit Hülfe eines im Anfangspunkte befestigten Fadens alle Isoplethen

für φ leicht realisiren und die zugehörigen Werthe beliebiger Funktionen von φ an den Schnittpunkten des gespannten Fadens mit empirisch getheilten Messkurven in der Ebene ablesen. Soll der Maassstab auf einer solchen Messkurve gleichförmig werden, so müssen ihre rechtwinkeligen Koordinaten y und x der Differentialgleichung:

$$\sqrt{dy^2+dx^2} = c\,.\,df(\varphi)$$

genügen, wo c ein konstanter Faktor und f die darzustellende Funktion von φ ist. Hinzu kommt noch die Gleichung, welche φ in seiner Abhängigkeit von x und y angiebt, nämlich:

$$m\frac{y}{x} = tg\,2\varphi.$$

Der Werth der Konstanten m hängt davon ab, in welchem Verhältniss die Maassstäbe für e und A stehen. Die Differentialgleichung hat unter den praktisch interessanten Fällen nur für $f(\varphi) = \varphi$, $m = 1$ eine einfache Lösung. In diesem Falle wird die Ablesekurve ein Kreis mit dem Anfangspunkt als Zentrum. Im Allgemeinen wird man aber e in einem grösseren Maassstabe als A auftragen und dann als Ablesekurven Parallelen zur Ordinatenaxe benutzen. Die Skalen, welche man so erhält, weichen für die praktisch wichtigen Funktionen φ, $tg\,\varphi$, $sin\,\varphi$, $sin\frac{\varphi}{2}$ nur wenig von gleichförmigen ab. Die Genauigkeit der Ablesung kann nur dadurch erhöht werden, dass man e in grösserem Maassstabe aufträgt. Dies geht aber nur für verhältnissmässig kleine Werthe von e; für die grossen würde das Gesammtformat unhandlich und man erhielte schleifende Schnitte.

Aus diesem Grunde ist es praktischer, den Abakus in der Weise anzulegen, wie es Tafel VI (*Fig. 1*) zeigt. Hier sind e und A auf parallelen Geraden in entgegengesetzter Richtung in gleichförmigen Maassstäben aufgetragen. Um für e eine grosse Genauigkeit in der Ablesung zu erzielen, sind nur 50 Skalentheile aufgetragen; ein Punkt der Skale bedeutet aber nicht bloss den Werth e_0, welcher an ihm angeschrieben steht, sondern zugleich die Werthe $50n+e_0$, wo n eine ganze Zahl ist, bis zum Werthe $e = 500$. Demgemäss erhält man zu jedem Werthe von n eine besondere Gerade, welche die Skala für φ trägt. Diese Geraden sind je nach dem Werthe von n in der Figur mit den Ziffern 0, 1, 2 ... 9 bezeichnet. Die Skale für A läuft von $A = 1000$ bis $A = 4000$. Nach dem Nullpunkte ihrer Skale konvergiren die 10 Skalen für φ. Bezeichnet man den Abstand der parallelen Skalen für e und A mit d, so sind die Entfernungen der Endpunkte der Skalen für φ vom Punkte ($A = 1000$), auf der Verbindungsgeraden der Punkte ($A = 1000$) und ($e = 50$) gemessen, $= \frac{d}{4+3n}$ ($n = 0, 1, 2 \ldots 9$) und diejenigen der anderen Endpunkte vom Punkt ($A = 4000$), auf der Verbindungsgeraden der Punkte ($A = 4000$) und ($e = 0$) gemessen, viermal so gross. Um die Theilpunkte für φ auf den schrägen Geraden zu bestimmen, zählen wir auf der Skale für A von ihrem Nullpunkte aus in ihrem Maassstabe Abscissen ξ und senkrecht dazu Ordinaten η. In diesen Koordinaten ist die Gleichung der Geraden für φ, die dem Werthe n entspricht:

$$\frac{\eta}{d} = \frac{\xi}{4000+3000n},$$

da 50 Skalentheile e ebenso gross sind wie 3000 Theile von A. Die Abscisse ξ eines bestimmten Punktes Φ der Geraden, welcher einen Werth φ_0 repräsentirt, ist gleich einem bestimmten Werth A_0. Mit dem Punkte A_0 und Φ liege in einer Geraden ein Punkt der Skale für e, der nach der Addition der Grösse $50n$ den Werth e_0 repräsentire. Dann verhält sich:

$$\frac{\eta}{d} = \frac{A_0}{A_0+60e_0} = \frac{1}{1+60\,tg\,2\varphi_0};$$

denn ein Skalentheil von e ist 60mal so gross dargestellt wie einer von A und $\frac{e_0}{A_0} = tg\,2\varphi_0$. η hängt also nur vom Verhältnisse $\frac{e_0}{A_0}$ ab, nimmt daher stets denselben Werth an, wenn nur φ_0 ungeändert bleibt, welchen Werth auch n haben möge. Mithin liegen gleichbenannte Theilpunkte auf den verschiedenen Skalen für φ je auf einer Parallelen zur A-Axe. Aus den beiden Gleichungen für $\frac{\eta}{d}$ erhält man:

$$\xi = 1000\frac{4+3n}{1+60\,tg\,2\varphi_0},$$

wonach man für jede der Geraden ($n = 0, 1, 2 \ldots 9$) zu jedem Werthe von φ die Abscisse seines Bildpunktes berechnen kann. Die Ordinaten zu berechnen ist deshalb weniger räthlich, weil die Geraden nur eine geringe Neigung gegen die Abscissenaxe besitzen. Für die kleinen Werthe von n werden die Skalen für φ sehr ungleichförmig; man muss deshalb hier die Theilung ziemlich weit treiben, was aber leicht ausführbar ist, weil das ganze Intervall klein und auf grossem Raum dargestellt ist. Bei dem gewählten Format rücken die Geraden für die hohen Werthe von n so nahe zusammen, dass es nicht möglich ist, überall an die Theilpunkte die zugehörigen Zahlenwerthe zu schreiben. Hier erleichtern die Kurven I bezgl. II, welche die auf einander folgenden Geraden in Werthen, die um 1° bezgl. 0°5 auseinander liegen, treffen, die Uebersicht. An den ungünstigsten Theilen des Abakus können $^1/_{20}$ Grade noch geschätzt werden, an den günstigsten $^1/_{1000}$ Grade.

Die Ablesung geschieht so, dass man zuerst $50\,n$ vom Werthe e subtrahirt, so dass der Rest $e' < 50$ ist. Den Bildpunkt von e' auf der Skale für e verbindet man durch einen gespannten Faden mit dem Bildpunkte von A und liest am Schnittpunkte des Fadens mit der mit n bezeichneten Geraden den Winkel φ ab; z. B. $A = 2000$, $e = 70$, $\varphi = 1°$.

Multiplizirt man A und e mit derselben Zahl, so ändert sich der Werth von φ nicht. Dies kann mit Vortheil benutzt werden, da die Ablesung desselben Werthes von φ um so genauer gemacht werden kann, je grösser n ist; die Geraden, welche grösseren Werthen von n entsprechen, sind nämlich weniger gegen die Horizontalrichtung geneigt. Ganz ebenso wie für φ selbst, könnte man einen solchen Abakus für $tg\,\varphi$ oder irgend eine andere Funktion von φ entwerfen; man erhielte dann nur andere Skalen auf den Geraden 0, 1, 2 ... 9. Die Tafel VI entspricht der Tabelle 21a im Leitfaden von Kohlrausch.

7. Tafel zur Reduktion von Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen.

Hat man bei einer Schwingungsweite α die Schwingungsdauer t gefunden, so muss man, um sie auf unendlich kleine Bögen zu reduziren, die Grösse $k \,.\, t$ subtrahiren, wo $k = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{4} + \frac{5}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{4}$ ist. Man stellt sich hierfür am besten eine Korrektionstabelle her, welche k als Funktion von α giebt, wie es in Tab. 21 im Kohlrausch'schen Leitfaden (Seite 418) geschehen ist. Bei Beobachtungen mit Spiegel und Skale, wenn e den ganzen Schwingungsbogen und A den Abstand von Spiegel und Skale (beide in Skalentheilen gemessen) bedeuten, nimmt das Korrektionsglied die Form $\frac{e^2}{256\,A^2} t$ an. Will man genauer die Abnahme des Schwingungsbogens während der Beobachtung berücksichtigen, so ist für e die Grösse $a\left(1 - \frac{d^2}{24\,a^2}\right)$ zu setzen, wo a das Mittel aus dem ersten und letzten Bogen, d deren Differenz ist.[1]) Die darzustellende Funktion k hat also die Form:

$$k = \frac{a^2\left(1 - \frac{d^2}{24\,a^2}\right)^2}{256\,A^2} \quad \text{oder} \quad 384\,a\sqrt{k} + \frac{d^2 - 24\,a^2}{A} = 0.$$

Will man alle vier Variabelen durch Punktfolgen auf je einer Kurve darstellen, so muss man ein Transparent mit einer Zuordnungskurve verwenden, deren Lage durch drei der Variabelen bestimmt wird. Wir wählen hierzu ein System aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Soll dies möglich sein, so muss sich die gegebene Beziehungsgleichung mit der Gleichung:

$$(\eta_1 - \eta_2)\,(\eta_3 - \eta_4) + (\xi_1 - \xi_2)\,(\xi_3 - \xi_4) = 0$$

identifiziren lassen, wo die η und ξ die rechtwinkeligen Koordinaten der Kurven für die vier Variabelen sind, also je zwei von ihnen, welche den gleichen Index haben, Funktionen derselben Variabelen der Beziehungsgleichung sein müssen. Wir setzen:

$$\eta_1 = 0 \qquad \eta_2 = \frac{384\,a}{m} \qquad \eta_3 = 0 \qquad \eta_4 = m\sqrt{k}$$

$$\xi_1 = \frac{d^2}{n} \qquad \xi_2 = \frac{24\,a^2}{n} \qquad \xi_3 = \frac{n}{A} \qquad \xi_4 = 0,$$

[1]) F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, S. 216. Leipzig 1892.

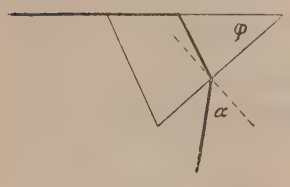
wo m und n verfügbare Konstanten sind. Diese bestimmen wir so, dass für die darzustellenden Variabelen-Intervalle die grössten Werthe von η_2 und η_4, sowie diejenigen von ξ_2 und ξ_3 einander gleich werden. Die beiden Maassstäbe für d und A auf der Geraden $\eta = 0$ kollidiren gar nicht, weil der erstere, dem geringen Einflusse von d auf das Resultat entsprechend, nur ein sehr kleines Intervall einnimmt.

Der Maassstab für a fällt auf eine Parabel, und für die Interpolation ist zu merken, dass ihre Ordinaten den Werthen von a selbst proportional sind. Um diesen Maassstab möglichst gleichförmig zu machen, wäre es also am besten, m verhältnissmässig klein im Vergleich zu n zu wählen; dadurch würde aber der Maassstab für die gesuchte Variabele k kleiner, weshalb es besser ist, m und n wie oben angegeben zu bestimmen. Die in Tafel VI *(Fig. 2)* dargestellten Intervalle sind: a von 0—300, A von 1000—4000, k von 0—0.0$_3$4. Der Maassstab für d wird bei den gewählten Verhältnissen sehr klein. Man erhält für $d = 50, 100, 150,$ $\xi_1 = \frac{1}{80}, \frac{1}{24}, \frac{3}{32}$ *mm.* Man sieht daraus, wie klein der Einfluss von d auf das Resultat ist. Die Ablesung geschieht so, dass man eine Gerade des Transparentes die Punkte a und d verbinden, die andere zu ihr senkrecht durch den Punkt A gehen lässt; diese schneidet dann die Gerade $\xi = 0$ im gesuchten Werth k. Bequem ist es, auf dem Transparent eine ganze Schaar von Parallelen mit einer Senkrechten aufzuzeichnen, da man dann, wenn die Senkrechte durch die Punkte a und d gelegt ist, mit einer geringen Verschiebung eine der Parallelen in die verlangte Lage bringen kann.

8. Tafel zur Bestimmung des Brechungsverhältnisses eines Prismas.

Unter den verschiedenen Methoden zur Bestimmung eines Brechungsverhältnisses mittelst der prismatischen Ablenkung ist die von F. Kohlrausch [1]) angegebene Methode des streifenden Eintrittes diejenige, welche in den weitesten Grenzen (d. h. auch für Prismen mit grossen stumpfen Winkeln) angewendet und wo zugleich die Beobachtung mit den einfachsten Hülfsmitteln, nämlich einem Fernrohre vor einem drehbaren Theilkreise, ausgeführt werden kann. Als Variabelen treten dabei auf: der Prismenwinkel φ *(Fig. 5)*, der Winkel α, den der austretende Lichtstrahl mit dem Einfallsloth der Fläche, aus der er austritt, bildet (α wächst, wenn der Strahl von der Prismenkante weggedreht wird); ferner das Brechungsverhältniss n. Dieses berechnet sich aus den beiden andern Variabelen nach der Formel:

Fig. 5.



$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2}.$$

Wir schreiben diese:

$$\sqrt{n^2-1} = \frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}$$

und nach Einführung der verfügbaren Konstanten p und q:

$$\sqrt{n^2-1}\,\frac{q\sin\varphi}{q\cos\varphi + p} + \frac{p - q\sin\alpha}{q\cos\varphi + p} = 1.$$

Diese Gleichung identifiziren wir mit der auf Seite 10 aufgestellten Gleichung

$$ZX_1 + YX_2 = 1,$$

welche für einen Abakus gilt, in welchem zwei Variabelen auf parallelen Geraden dargestellt sind, die dritte aber auf einer Kurve. Von diesen Funktionen XYZ hängen die rechtwinkeligen Koordinaten $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$, $\xi_3\eta_3$ der Kurve und der beiden Parallelen gemäss den Gleichungen

$$\xi_1 = \frac{1}{X_1 + X_2} \qquad \eta_1 = \frac{cX_2}{X_1 + X_2}$$

$$\xi_2 = Y \qquad \eta_2 = c$$

$$\xi_3 = Z \qquad \eta_3 = 0$$

[1]) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 16, S. 605, 1882.

ab, wo c der Abstand der beiden Parallelen ist. Wir setzen also:

$$Z = \sqrt{n^2-1} \qquad Y = p - q \sin\alpha \qquad X_1 = \frac{q \sin\varphi}{q\cos\varphi + p} \qquad X_2 = \frac{1}{q\cos\varphi + p}$$

und erhalten:

$$\xi_1 = \frac{p + q\cos\varphi}{1 + q\sin\varphi} \qquad \eta_1 = \frac{c}{1+q\sin\varphi}$$

$$\xi_2 = p - q\sin\alpha \qquad \eta_2 = c$$

$$\xi_3 = \sqrt{n^2-1} \qquad \eta_3 = 0.$$

Die Kurve $\xi_1\,\eta_1$ ist von der II. Ordnung und schneidet die Axe der α in den Punkten ($\alpha = 90°$) und ($\alpha = -90°$), in welchen φ die Werthe 180° resp. 0° hat.

Am praktischsten wird man nun p und q so bestimmen, dass für das darzustellende Intervall die ganzen Skalen für n und α gleich lang werden und sich genau gegenüberliegen. Soll also z. B. die Darstellung bis zum Werthe $n = 2$ reichen, so wird man $p = q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ setzen. Ich möchte indessen dieses Beispiel benutzen, um einige Betrachtungen von mehr theoretischem Interesse daran zu knüpfen. Die Konstanten p, q und c sollen so bestimmt werden, dass der Maassstab auf der Kurve so gleichförmig als möglich wird. Bezeichnet ds das Bogenelement der Kurve, so wäre der Maassstab vollkommen gleichförmig, falls $\frac{ds}{d\varphi}$ für alle Werthe von φ den gleichen Werth hätte. Man erhält:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2} = \frac{q}{(1+q\sin\varphi)^2}\sqrt{c^2\cos^2\varphi + (q + p\cos\varphi + \sin\varphi)^2}\,.$$

Es ist nicht möglich, p, q und c so zu bestimmen, dass $\frac{ds}{d\varphi}$ eine Konstante wird; natürlich kann man nicht $q = 0$ oder $c = 0$ setzen. Dagegen lassen sich die Konstanten so bestimmen, dass $\frac{ds}{d\varphi}$ für $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pi$ den gleichen Werth erlangt, während $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$ für diese drei Werthe von φ verschwindet. Um dies zu erreichen, muss man $p = 0$; $q = \sqrt{2}-1$; $c = \sqrt{\sqrt{8}-2.5}$ setzen. Es zeigt sich, dass in diesem Falle die Maximalschwankung von $\frac{ds}{d\varphi}$ im ganzen Intervall von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ den kleinsten Betrag hat. Das Maximum von $\frac{ds}{d\varphi}$ tritt nahezu für die Werthe $\varphi = 34°1/3$ und $\varphi = 180° - 34°1/3$ ein und ist $= 0.2958$, während das Minimum für $\varphi = 0$, $\varphi = 90°$ und $\varphi = 180°$ eintritt und den Werth 0.2929 hat. Der Maassstab auf der Kurve für φ ist also nahezu gleichförmig. Die Kurve selbst liegt symmetrisch zum Werthe $\varphi = 90°$, d. h. zu der Geraden $\xi = 0$ und ist eine Ellipse (Tafel VI, Fig. 3), deren Gleichung sich auf die Form:

$$q^2\eta_1^2 = c^2\xi_1^2 + (c-\eta_1)^2$$

$$\frac{\xi_1^2}{0.4551} + \frac{(\eta_1 - 0.6918)^2}{0.2865} = 1$$

bringen lässt; aus dieser erkennt man leicht die Lage des Mittelpunktes und der vier Scheitelpunkte. Die Bestimmungsgleichungen für die Variabelen:

$$\xi_1 = \frac{q\cos\varphi}{1+q\sin\varphi} \qquad \eta_1 = \frac{c}{1+q\sin\varphi}$$

$$\xi_2 = -q\sin\alpha \qquad \eta_2 = c$$

$$\xi_3 = \sqrt{n^2-1} \qquad \eta_3 = 0$$

zeigen, dass, wenn man c seinen Werth lässt, q aber den entgegengesetzten Werth giebt, dies auf ξ_1 und η_1 keinen anderen Einfluss hat, als wenn man q ungeändert lässt, aber $(\varphi + 180)$ an Stelle von φ setzt. Die Kurve $\xi_1\,\eta_1$ bleibt also dieselbe Ellipse, nur benutzt man einen anderen Theil derselben. Im übrigen ändert ξ_2 sein Vorzeichen, sonst bleibt alles gleich. Man kann also auch die Theilung für φ von 180°—360° und

die negativen Werthe von α benutzen und erhält die gleichen Werthe für n. Da $\alpha = +0$ und $\alpha = -0$ derselbe Punkt ist, so liegen je zwei Punkte φ, deren Werthe sich um 180° unterscheiden, mit dem Punkte ($\alpha = 0$) in einer Geraden. Für $n = 1$ ergiebt die dargestellte Beziehungsgleichung:

$$\cos \varphi = -\sin \alpha,$$

d. h.: Je zwei Ellipsenpunkte, deren Werthe φ und $(360-\varphi)$ sind, liegen mit dem Punkte ($n = 1$) und einem Punkte der α-Axe, dessen $\alpha = (\varphi-90)$ ist, in einer Geraden. Speziell gilt dies für die zusammenfallenden Punkte $\varphi = 0$, $\varphi = 360$, $\alpha = -90$, sowie für $\varphi = 180$, $\varphi = 180$, $\alpha = 90$. Die Tangenten vom Punkte ($n = 1$) berühren also die Ellipse in diesen beiden Punkten; die Axe der α ist Polare des Punktes ($n = 1$), und da die n-Axe auf der kleinen Ellipsenaxe senkrecht steht, der Punkt ($\alpha = 0$) aber auf dieser liegt, ist auch umgekehrt die Axe der n Polare des Punktes ($\alpha = 0$).

Will man das Brechungsverhältniss einer Substanz mit dem Prisma in Luft bestimmen, so muss der Prismenwinkel φ unter einem vom Brechungsverhältnisse abhängigen Maximalwerth bleiben. Bei grösseren brechenden Winkeln tritt ein Lichtstrahl, welcher streifend eintrat, gar nicht durch die zweite Prismenfläche aus, weil er sie entweder gar nicht erreicht oder durch Totalreflexion in das Prisma zurückgeworfen wird. Diesen grössten Prismenwinkel für die betreffende Substanz kann man sehr leicht auf der Tafel ablesen. Man braucht nur den Punkt auf der Axe der n, welcher das Brechungsverhältniss der Substanz darstellt, mit dem Punkte ($\alpha = 90°$) durch eine Gerade zu verbinden; wo diese die Ellipse zum andern Male schneidet, liest man den maximalen Prismenwinkel ab. Die Hälfte dieses Winkels ist der Grenzwinkel γ der totalen Reflexion. Direkt erhält man γ am Schnittpunkte der Ellipse mit der Verbindungsgeraden des Punktes n mit dem Punkte ($\alpha = 0$). Die Tangenten von einem Punkte der n-Axe an die Ellipse entsprechen dem Fall, wo der Prismenwinkel φ seine physikalische Bedeutung verliert; dies geschieht dann, wenn der gebrochene Strahl die zweite Prismenfläche eben nicht mehr erreicht, d. h. zu ihr parallel ist. Der Prismenwinkel φ ist dann $90+\gamma$ resp. $270+\gamma$. Man kann also γ auch auf diese Weise bestimmen; natürlich sind aber die anderen Ablesungen viel genauer. Auch wenn man $p \gtrless 0$ annimmt, bleiben diese Methoden zur Bestimmung von γ ungeändert.

9. Tafel zur Bestimmung der Dispersion mit dem Abbe'schen Refraktometer.

Den Abbe'schen Refraktometern, die zur Bestimmung des Brechungsverhältnisses und der Dispersion dienen, werden zur Berechnung der letzteren Tabellen beigegeben. Aus diesen entnimmt man drei Grössen A, B und σ, aus denen sich die Dispersion Δ nach der Formel:

$$\Delta = A+B.\sigma$$

berechnet. Hier sind A und B empirische Funktionen des direkt abgelesenen Brechungsverhältnisses n, σ hängt von der Trommeltheilung z des Apparates ab. Man kann leicht einen Abakus konstruiren, der Δ direkt als Funktion von n und z giebt. Man trägt Δ und σ auf parallelen Geraden in gleichförmigen Maassstäben auf, schreibt aber an die Theilpunkte von σ die zugehörigen Werthe von z (für z wird dann der Maassstab ungleichförmig). Dann ergiebt sich für den Maassstab von n eine Kurve, deren Koordinaten Funktionen der Grössen A und B sind, also aus der Tabelle des Apparates berechnet werden können. Eine Tafel in den Dimensionen $30^{cm}.30^{cm}$ reicht aus, um Δ auf drei Ziffern sicher ablesen zu können.

Die Beispiele solcher Tafeln aus den verschiedenen Gebieten der Physik liessen sich leicht vermehren; indess reichen die angeführten hin, um zu zeigen, in welcher Weise man derartige Tafeln anlegen kann. Was die praktische Herstellung anlangt, so zeichnet man am besten auf gutes, starkes Papier. Aufkleben ist nicht zu empfehlen. Grosse Tafeln befestigt man am besten auf einem Reissbrett; dies hat auch den Vortheil, dass man, wenn ein Ende des Fadens dieselbe Lage behalten soll, es leicht mit einer Heftzwecke feststecken kann. Das Anlegen eines Fadens geschieht rasch und sicher, indem man ihn mit dem Fingernagel an dem Punkte, der eine Variabele resp. ein Variabelenpaar darstellt, anklemmt, während die andere Hand den Faden spannt und in die verlangte Lage dreht. Für Transparente eignen sich hauptsächlich Glasplatten, auch Pauspapier.

Lebenslauf des Verfassers.

Am 31. März 1868 als Sohn des Hauptmannes Heinrich Maurer und der Marie Maurer, geb. Wernher, zu Darmstadt geboren, besuchte ich die dortige Privatschule meines Onkels Theodor Maurer bis Ostern 1878, von da ab das Ludwig Georgs-Gymnasium zu Darmstadt, welches ich Ostern 1885 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Ich studirte Mathematik und Naturwissenschaften von Ostern 1885 bis Ostern 1887 in Strassburg, Sommer 1887 in Berlin, dann wieder in Strassburg. Hier erwarb ich im Sommer 1889 durch ein Examen pro facultate docendi ein bedingtes Oberlehrer-Zeugniss, das ich im Winter 1890/91 zu einem vollständigen ergänzte. Von Herbst 1889 bis Herbst 1890 hielt ich mich in Marburg auf, wo ich den damaligen Privatdozenten, jetzt verstorbenen Professor B. Klein bei seinen Arbeiten unterstützte. Von Herbst 1890 bis Herbst 1891 machte ich an der Realschule bei St. Johann in Strassburg mein gesetzliches Probejahr und war während derselben Zeit Hilfsassistent am physikalischen Institut der Universität. Nachdem ich darauf meiner Militärdienstpflicht genügt, arbeitete ich im Winter 1892/93 am meteorologischen Landesdienst für Elsass-Lothringen und unterrichtete gleichzeitig an der neuen Realschule in Strassburg. Seit Ostern 1893 bin ich zweiter Assistent am physikalischen Institut daselbst.

Meine Lehrer auf der Universität waren die Herren Professoren und Privatdozenten: de Bary, Bücking, Christoffel, Cohn, Fittig, Gerland, Goette, Kohlrausch, Kundt, Reye, Roth, Schering, Schur, Stenger, Windelband, Ziegler in Strassburg, Fuchs, König, Kronecker, Netto, Rammelsberg und Weinstein in Berlin, Fischer und Weber in Marburg. Allen diesen Herren, meinen verehrten Lehrern, spreche ich meinen besten Dank aus.

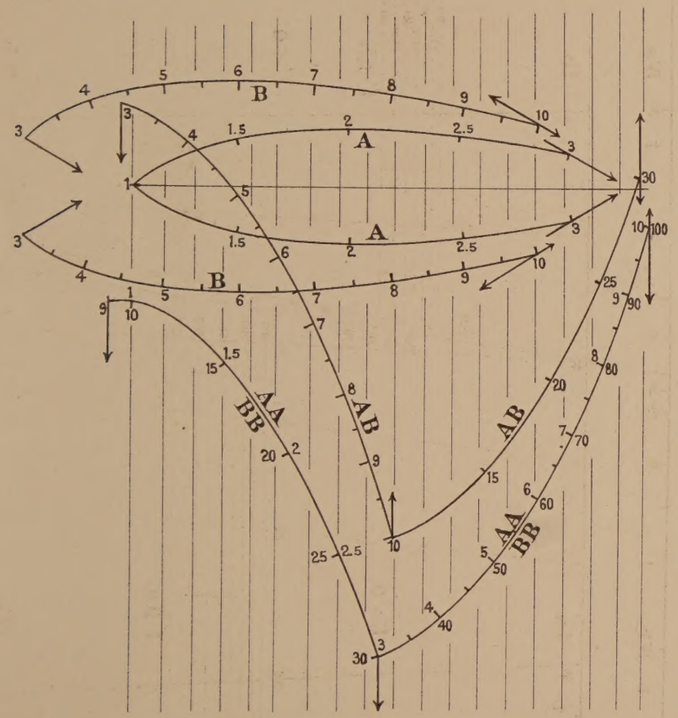
Berichtigungen.

Seite 14, Zeile 21 v. o. lies $\lambda = 48^\circ 35'$ statt $\lambda = 49^\circ 35'$.

„ 15, „ 16 v. o. fehlt das Gleichzeichen zwischen den beiden Formeln.

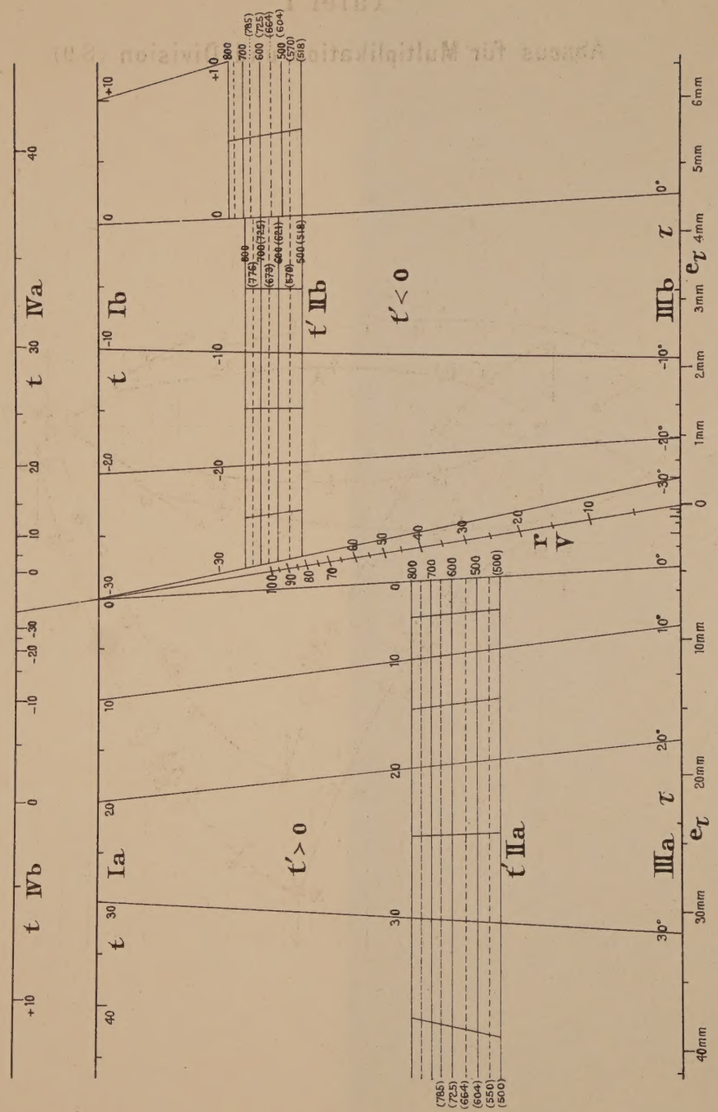
Tafel I

Abacus für Multiplikation und Division (S.9)



Tafel IV

Psychrometertafel (S.17)



Tafel VI

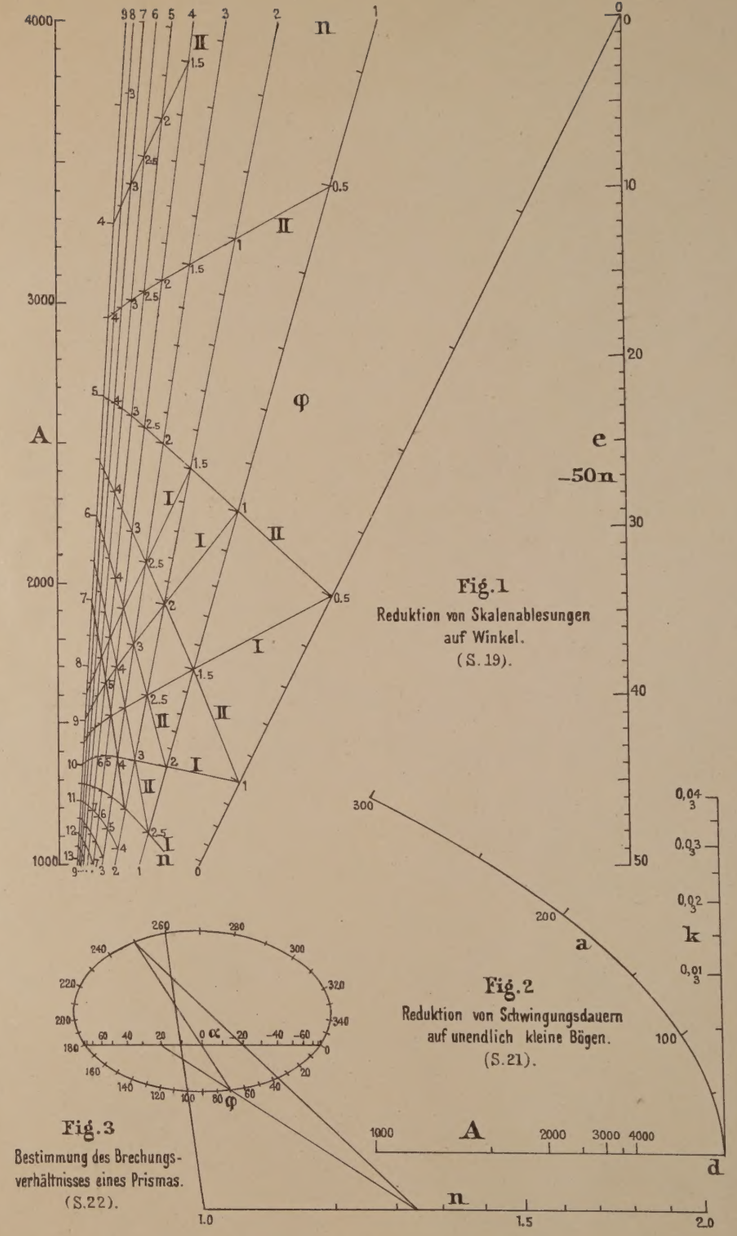


Fig.1
Reduktion von Skalenablesungen auf Winkel.
(S.19).

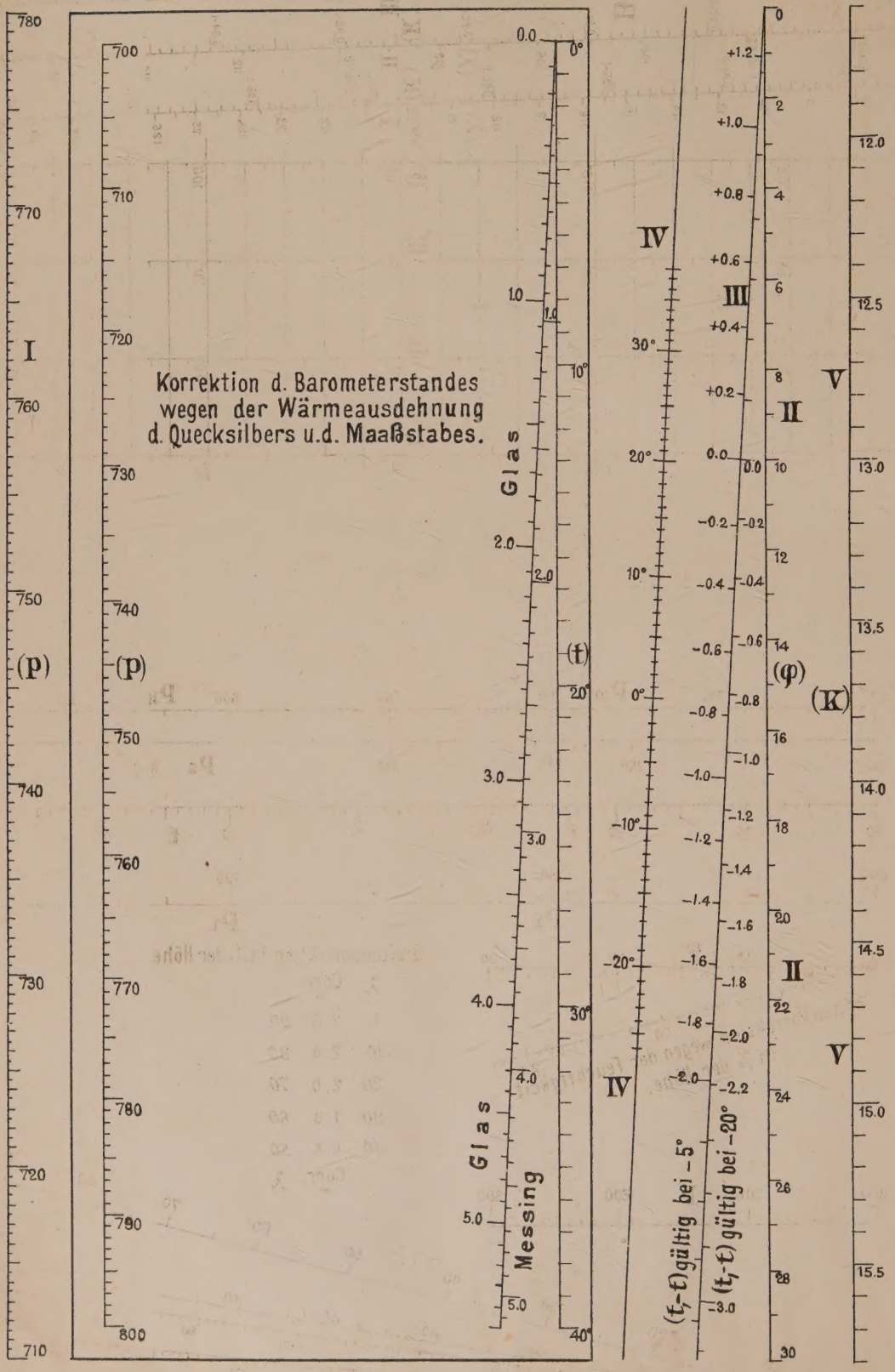
Fig.2
Reduktion von Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen.
(S.21).

Fig.3
Bestimmung des Brechungsverhältnisses eines Prismas.
(S.22).

Tafel II.

Reduktion des Barometerstandes auf Meeresniveau

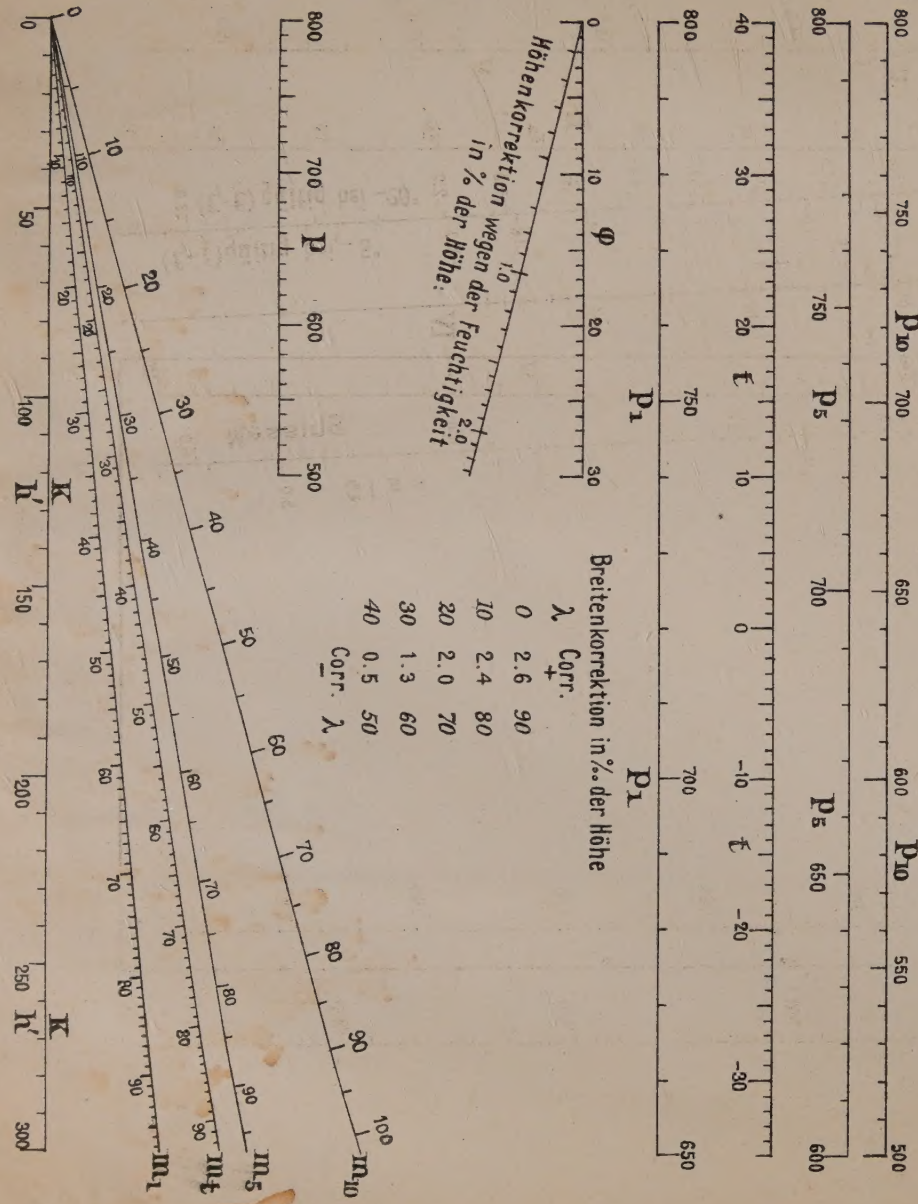
(gültig für Strassburg i.E.) (S. 12 u. 13.)



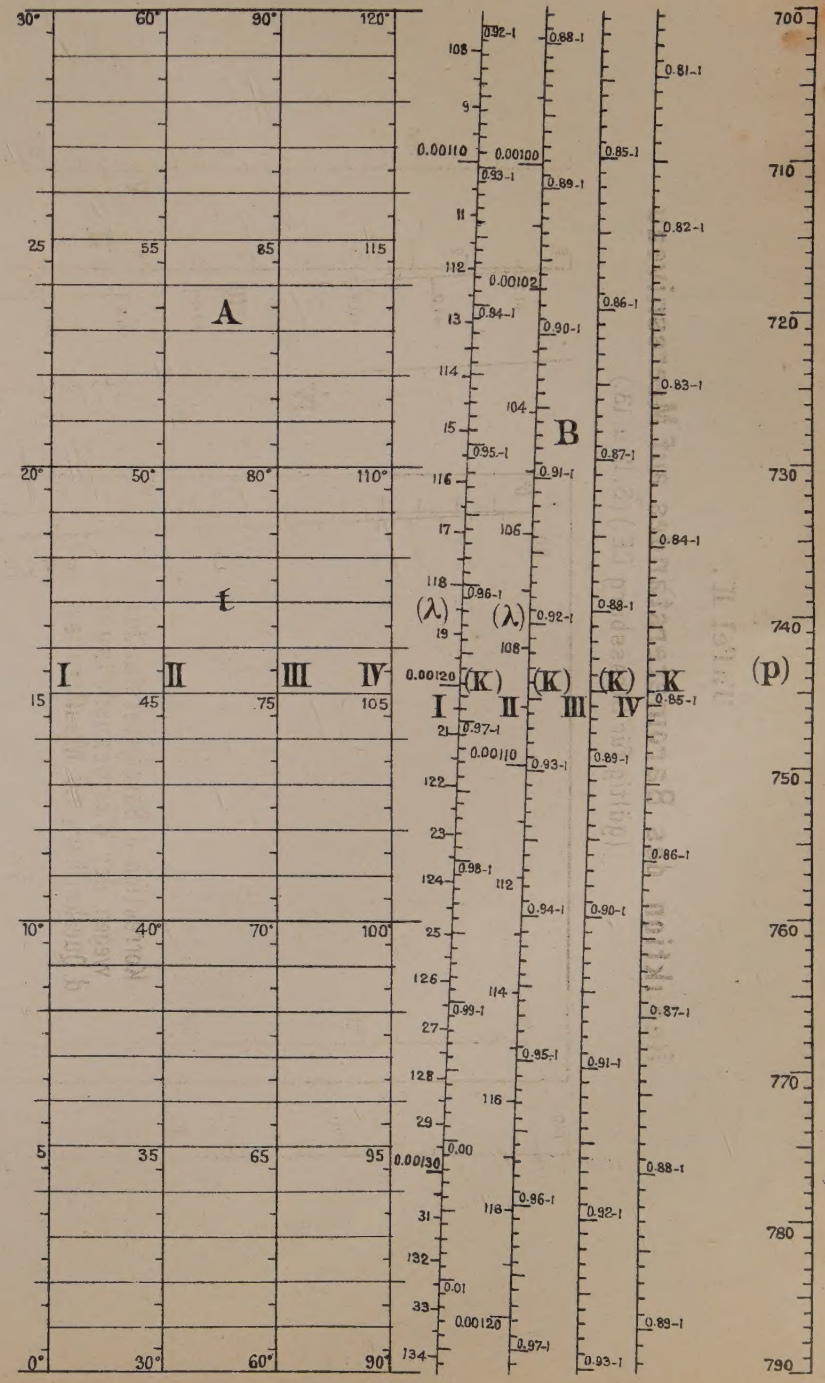
Tafel III.

Reduktion des Barometerstandes auf Meeresniveau.

(allgemein) (S. 15.)



Tafel V.

Luftdichte λ und $K = \log \frac{P}{(1+\alpha t)760}$ beim Druck p und der Temperatur t

(S. 19.)